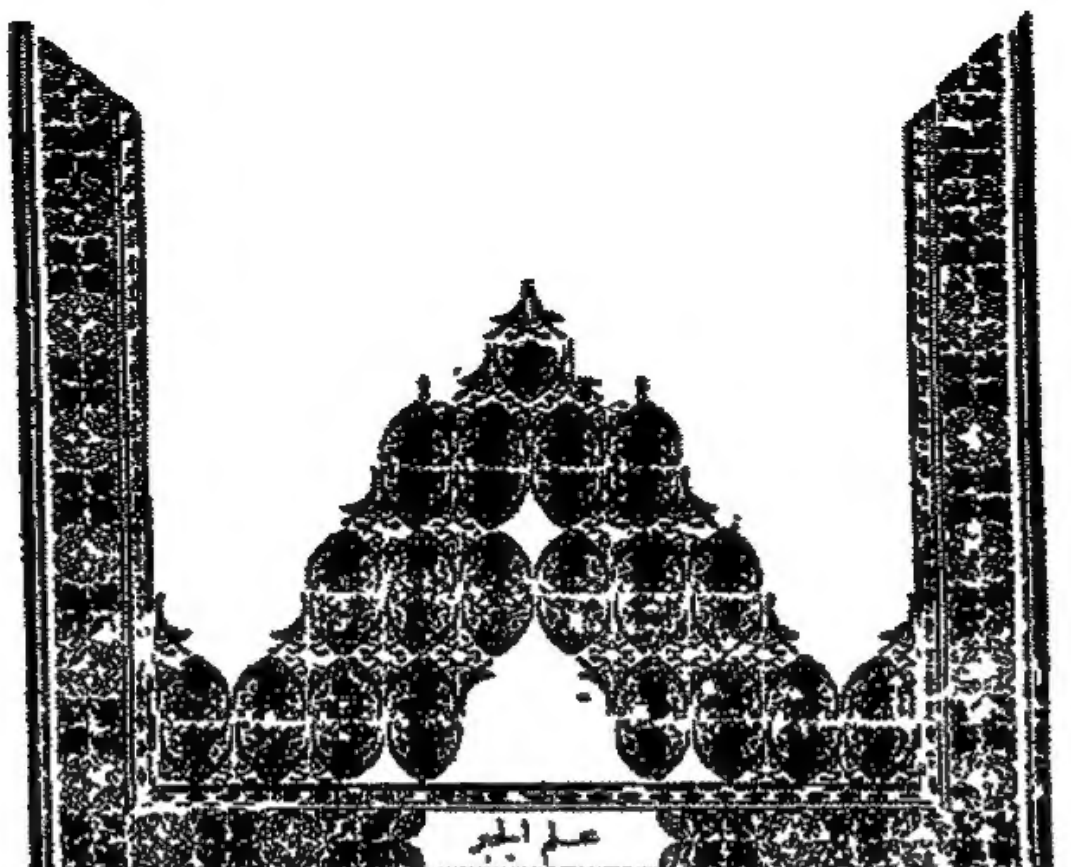


صفحة	
٨٤	الكلام على جمع تلك الجذور وطرحها
٨٤	في الكلام على ضرب تلك الجذور
٨٥	في قسمة الجذور
	•(في المعادلات والمسائل ذات الدرجة الثانية)•
٩١	في المعادلات ذات الدرجة الثانية والمجهول الواحد
٩١	في المعادلة غير التامة ذات الدرجة الثانية
٩٣	في المعادلة التامة ذات الدرجة الثانية
٩٧	في المناقشات العمومية للمعادلات ذات الدرجة الثانية
١٠٦	في مسائل الدرجة الثانية
	•(الباب الرابع)•
	•(في التناسبات والمتواليات العددية والهندسية واللوغاريتم)•
١٢٩	في التناسبة العددية أى التفاضلية
١٣٠	في التناسبة الهندسية
١٣٤	في المتواليات العددية
١٣٨	مسائل يطلب حلها من الطلبة
١٣٨	في المتواليات التقسيمية أى الهندسية
١٤٣	مسائل محل بواسطة المتواليات الهندسية
١٤٥	في اللوغاريتم
١٤٩	في الأرقام تحت التي أساءها ١٠ واستعمال الجذور
	اللوغاريتمية
١٥٠	في المقسم اللوغاريتمى
١٥٣	في استعمال ايندارل لارغاريتمية في عمليات الحسابية
١٥٣	في شرح جدول لارغاريتم تحت تعريب واستعماله

• (الباب الخامس) •

في مسائل محلها بقواعد هذا المختصر وتطبيقها عليها تتمرن التلاميذ
 متقوي ملكتهم في هذا العلم وهي مهينة بحسب ترتيب قواعد

- ١٦٠ مسائل تخص الدرجة الأولى .
- ١٦٨ مسائل تحل بواسطة القواعد المقررة في الدرجة الثانية
- ١٨٢ مسائل تحل بواسطة قواعد المتوالية العددية



علم الجبر

بسم الله الرحمن الرحيم

نعمتك يا جابر قلوب المنكسرين • لا يقابلها شكر الشاكرين • اذ لا يجمعها
 حاصر بعد • ولا يعرف باقي طرقها احد • ضربتها على وجودك براهين
 • تدكدك بها اساس المهددين • وقسمتها بحكمتك فلا عتاب • ان في ذلك
 لذكرى لاولى الالباب • فهي اجل ان يعرف قدرها • او يدرك بالاستفراج
 جذرها • فتحمده اللهم على ما اوتيت • ونشكر فضل وجودك على
 ما اسديت • ونصلي ونسلم على سيد ولد عدنان • الذي نسخ دينه بجمع
 الاديان • محمد المنتخب من اعلا ارومه • المبعوث من خير جبرئومه •
 وعلى الخلفاء الراشدين • وآله وصحبه اجمعين • خصوصاً سيف السطوة
 المنتضى • ابي الحسن على المرتضى • القاتل من قلب اوقاه • لا يعرف
 الجذر الا اسم الا الله • ما صنعت حياة ورفاه • ونحن مشتاق
 الى انقضاء

وبعد فلما تعلقت ارادة الامني الاعظم • والداودي الاكرم • بقريية
 العساكر المصرية • وعدم حرقناهم من القنوت العسكرية • وكان من
 بجله وساتلها • ومما لا غناء عنه لساتلها • علم الجبر • العظيم القدر •
 صدرا امره الى من اجابه السعد بليك • فانظر المدارس الثلاث على ييك •
 بعمل متخيل لهم لطيف المبني • بطيل القدر في المعنى • فاحال ذلك
 على الماهر الليبي • والوذي الاريب • صاحب القطنة الوفي الوعد •
 عامرا قندي سعد • فانتخبه من مختصر الاعمال ايطرية • الذي ترجمه
 بالهند صفاة الخديوية • من حاز من كل فن طرفا • محمد اقليدس مصطفي •
 وقد زاد عليه الاول قواعدهم • واضاف اليه مسائل فافقه •
 ساعده في ترجمتها من القرناوية طويل الباع • ابراهيم اقليدس الباع •
 فجاء محتويا على حل المعادلات بالدرجتين • وعلى التناسبات والمتواليات
 وما يتعلق بهذين • فان لهم اذ خلا في حل المسائل العظيمة • وفي حساب
 كوز القل الجسيم • المعتاد تشكيلها بمجذبات الطويحية • وعلى مجت
 اللوغاريتم العظيم الاهميه • وقد تم بجائزة لطيفه • محتوية على مسائل
 شريفة • مرتبة كترتيب قواعد الكليه • منتخبة للعساكر الحربية •
 • (مقدمة) •

زعم بعض الناس ان هذا العلم يسمى باسم اول من اشتغل به ولا اصل لهذا
 الزعم في الكتب الاسلامية ان الذي اخترعه ابوبكر الخوارزمي وسماه بعلم
 الجبر والمقابلة لكن لم يعرف الزمن الذي اخترع فيه وقد قيل ان بلاد اسبانيا
 لما كانت في ايدي العرب مجاورة لبلاد افريقية اكتسبت هذا العلم منه في نحو
 سنة اثنى الف ومائة مصرية وفي نحو سنة اثنى الف وخمسمائة حنريية
 تجار ايطاليين من افريقية بنسخة من كتب هذا العلم الى بلادهم فاشتغل به
 الايطاليون لكن لم يتصلوا على ازيد من حل معادلة بدرجة رابعة وقد دخل
 هذا العلم بلاد النمسا واخذ في التقدم ببلاد الانجائز ثم انتقل الى فرنسا
 في سنة اثنى الف وخمسمائة ونسخ في غمينة واسرع في التقدم على

المؤلف قرأ السوافيت البارسي وهو أول شخص طبق الجبر على الهندسة
 وفي القرن السابع عشر تقدم هذا العلم تقدماً واضحاً من وقت إلى آخر حيث
 ظهر فيه مشاهير المؤلفين كالمؤلف فوتون وديكارن الشهيرين وأمثالهما
 وفي القرن الثامن عشر ظهر المؤلف الجراج وكوت وليلاس ومحوها
 من قول المؤلفين الذين عموا قوائده ورتبوه ترتيباً منتظماً
 وبقتدم هذا العلم تقدمت العلوم الهندسية والطبيعية والميكانيكية والفلكية
 والفنون العسكرية بل وجميع الصنائع وبذلك كان هذا العلم من أنفع العلوم
 لا ينكر فضله إلا جاهل وذلك أن علم الهندسة قبل تقدم هذا العلم كان في حين
 الضعف حتى أن كثيراً من مسائله كان مستحيل الحل ومكت على تلك
 الاستحالة مدة طويلة وكان أيضاً التوصل لإبراهيم القضايا الهندسية
 صعباً إذاً واسطة إذ ذلك تساعد العقول على مقاصدها فاحفظ علماء هذا
 العلم للبحث عن إثبات قواعد نظرية عامة حربية الوضع رقيقة المآك يتسبب
 عنها فك بعض المشكلات فابتوها وسموها بعلم الجبر وكان نصيبه على يد أسير
 الأوزار • إبراهيم عبد الغفار • ولما تم القام • وابن وشاح الختام •
 وسنه بالكواكب الدرية • في الأعمال الجبرية • وقد آن أن نشرع
 في المقصود • فنقول بعون الملك المعبود

• (مقدمة في علم الجبر) •

(١) الغرض الاصلى من علم الجبر حل المسائل العددية ومشكلات القضايا النظرية والعملية بوجه مختصر عام واغنا يتوصل الى هذا العلم باستعمال الحروف والعلامات فالحروف تستعمل للدلالة على الاعداد ان كانت القضية حسائية وللدلالة على الخطوط أو السطوح والأجسام ان كانت القضية اوالمسئلة هندسية

• (مقدمة في بيان العلامات والاصطلاحات) •

تستعمل العلامات للدلالة بطريق الاختصار على الارتباطات الواقعة بين الكميات الجارية عليها العمل فالعلامات الاصلية المستعملة هي

(أولاً) علامة $+$ وتدل على جمع عددین حين وضع بينهما ويلفظ بها زائد مثال ذلك $٥ + ٣$ ويلفظ به ٥ زائد ٣ ويستدل بها على انه يلزم ضم العدد ٣ الى ٥

(وثانياً) علامة $-$ وتدل على ان العدد التالى لها مطروح من العدد السابق لها ويلفظ بها ناقص

مثال ذلك $٥ - ٣$ ويلفظ به ٥ ناقص ٣ ويستدل بها على انه يلزم طرح العدد ٣ من ٥

(وثالثاً) علامة الضرب \times و $:$ وكلتا هاتين تدل على أن كذا مضروب في كذا ولا تستعمل الثانية الا في الحروف فقط ويمكن بيان حاصل ضرب العددين الميزينين بحرفين بكتابة احدهما بجانب الآخر بدون فاصل فحاصل ضرب ٥ في ٧ مثلاً يمكن بيانه هكذا ٥×٧ وحاصل ضرب ٣ في ٤ يمكن بيانه هكذا

٣×٤ أو ٤×٣ أو $٣ \cdot ٤$ أو $٤ \cdot ٣$

ويمكن بيان حاصل ضرب كيتين بجمل كاتيهما بين قوسين موضوعة احدهما بجانب الاخرى ولا يستعمل ذلك الا في المضارب المركبة من جزئين أو جملة

•(٣)•

أجزاء متقابلة عن بعضها بعلامة $+$ أو $-$ لحاصل ضرب \times $-$ في \times $+$ $-$ يمكن بيانها هكذا $(+ -)$ $(- +)$ وحاصل ضرب \times $-$ $+$ $-$ في $+$ $-$ $+$ $-$ هكذا $(- +)$ $(+ -)$ و $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ (ورابعا) علامة القسمة هكذا : أو شرطة أفقية هكذا $-$ وتستعملان كإتراء فيما إذا طلب مثلا خارج قسمة \div على \div فإنه يعين هكذا \div \div أو \div وكل منهما مناه \div يقوم على \div (وخامسا) المكرر وهو العدد الذي يكتب عن عین عدد آخر مبين بحرف أو جملة حروف ويدل على عدد مرات تكرار العدد الآخر مثال ذلك \div فإنه يدل على أن حرف \div مكرر خمس مرات أي $\div \div \div \div \div$

(وسادسا) علامة التساوي هكذا $=$ يلتقطها مساو وتدل على التساوي بين كيتين قد وضعت بينهما مثال ذلك $\div = \div$ فإنه يدل على تساوي المقدار \div بالمقدار \div (وسابعا) علامتا $<$ و $>$ فإن كتابتهما تدل على عدم تساوي الكميتين المفصولتين بها لكن الأولى تدل على الأكبر والثانية على الأصغر مثال ذلك $\div < \div$ وتلفظ هكذا \div أصغر من \div

(وثامنا) للدلالة على عدم تساوي كيتين بدون تمييز صغراهما عن كبراهما تستعمل هذه العلامة \neq مثال ذلك $\div \neq \div$ وتبين أن \div ليس مساويا \div

(٩) ووجد علامتان أيضا أحدهما تدل على قوة العدد والآخرى على جذره وقوة العدد هي حاصل ضرب مضروبين أو جملة مضارب كل منهما مساو لهذا العدد ويقال إن العدد مرفوع إلى القوة الثانية أو الثالثة أو الرابعة وهكذا إذا كان حاصله مكونا من مضروبين أو ثلاثة مضارب

أو أربعة وهكذا كل منها مساو لهذا العدد مثال ذلك $\times \times \times \times$ فهذا يدل على القوة الثالثة للعدد \times وتبين قوة العدد بكتابته عليه ما مثلا جهة الشغال بقليل عدد مرات دخوله مضروباً في هذه القوة ويسمى عدد المرات أساً فالقوة الرابعة للعدد \times تكتب هكذا \times^4 ويلفظ \times أس أربعة فالأس يدل على درجة القوة التي القوة الثانية لعدد تسمى مربعاً والقوة الثالثة تسمى مكعباً

وجذر العدد اصله الذي اذا رفع لدرجة ما تحصل منه العدد المذكور وهذا الجذر يسمى الجذر الثاني أو الثالث وهكذا اذا رفع الى القوة الثانية أو الثالثة وهكذا لاناج العدد المعلوم فالجذر الثاني يسمى الجذر التربيعي والجذر الثالث يسمى الجذر التكعيبي

فالعدد \times هو الجذر الثاني أو الجذر التربيعي للعدد \times^2 هو الجذر الرابع لمقدار \times^4 ودرجة جذر العدد هي درجة القوة اللازمة لرفع هذا الجذر لينتج العدد المعلوم ويستدل على جذر العدد بوضع هذه العلامة $\sqrt{\quad}$ عليه مكتوباً بين شعبتيها العدد المبين لدرجة الجذر فيستدل على

الجذر التكعيبي للعدد \times بهذه العلامة $\sqrt[3]{\quad}$ ويلفظها الجذر التكعيبي للعدد \times ومتى طلب جذر المربع فلا حاجة لوضع $\sqrt{\quad}$ فوق العلامة فالجذر التربيعي للعدد \times يكتب هكذا $\sqrt{\quad}$

(٣) ويظهر ثمة استعمال الحروف والعلامات الجبرية في حل ما اذا كان عندنا

مجموع عددين يساوي ٢٥ وقاضيهما يساوي ٩ والمطلوب معرفة كس من اثنين العددين

فيمكن حل هذه المسئلة بانقواعد الحسابية غير أن استعمال العلامات الجبرية أنحصرت أسهل وذلك بأن يرمز لاصغر العددين المجهولين بالحرف x وحيث كانت ضلعهما مساوياً للعدد ٩ يكون مقدار العدد الاكبر $x + 9$ وحيث أن اصل جمعها يجب أن يكون مساوياً للعدد ٢٥

(٥)

يحدث هذا التساوى

$$٢٥ = ٩ + ٢ \text{ أو } ٢٥ = ٩ + ٢$$

وحيث أن ٢ + ٩ يساوى ٢٥ يكون ٢ مساويا ٢٥ - ٩

$$\text{أى } ٢ = ٢٥ - ٩ \text{ أى } ٢ = ١٦$$

ومن حيث أن ٢ + ٩ يساوى ١٦ يكون ٩ = نصف ١٦

$$\text{أو } ٩ = \frac{١٦}{٢} = ٨$$

فأذن يكون العدد الأصغر مساويا ٨ والأكبر مساويا ٩ أى

$$١٧ \text{ لأن } ١٧ = ٨ + ٩ \text{ و } ٢٥ = ٨ - ١٧$$

فقد ظهر من ذلك أن في استعمال العلامات الجبرية اختصارا وبساطة للحل

المسئلة غير أن هذا الحل غير عام وبلعله عاما كما هو الغرض من علم الجبر

تستعمل الحروف وكيفية ذلك أن يقال ليكن x رمز الحاصل جمع

عددين و y رمز الفاضل هما والمطلوب معرفة كل من العددين فيفرض

أن x رمز العدد الأصغر يكون الأكبر $y + x$ فيحدث

$$٢٥ = x + y \text{ أو } ٢٥ = x + y$$

$$٢ = x - y \text{ أو } ٢ = x - y$$

$$٢٥ = x + y \text{ أو } ٢٥ = x + y$$

$$٢ = x - y$$

وحيث أن العدد الأصغر يساوى $\frac{٢٥ + ٢}{٢}$ يكون الأكبر الذى هو $x + y$

$$\text{مساويا } \frac{٢٥ + ٢}{٢} + \frac{٢٥ - ٢}{٢} = \frac{٥٠}{٢} = ٢٥$$

$$= \frac{٥٠}{٢}$$

فأذن يكون العدد الأصغر مساويا $\frac{٢٥ + ٢}{٢}$ والأكبر مساويا $\frac{٢٥ - ٢}{٢}$

وليتنبه إلى أن هذين الناتجين لا يخصان مقدارين مرادين من x و y

فحينئذ يكون الحاصل عاما وهذا الناتجان المسميان قانونين يمكن استعمالهما

بدون واسطة في حل المسائل المشابهة لهذه المسئلة لانه اذا فرض أن المطلوب

تيجاد العددين اللذين حاصل جمعهما ١٣٧ وفاضلهما ٥٩

(٢)

•(٦)•

يمكن في ان يوضع في هذين القانونين بدل * العدد ١٣٧ و بدل *
العدد ٥٩ فيصير $\frac{٥٩}{١٣٧}$ اي ٩٨ وهو مقدار العدد الاكبر
ثم $\frac{٥٩}{١٣٧}$ اي ٣٩ وهو مقدار العدد الاصغر .

ويمكن وضع المقدارين السابقين اللذين هما $\frac{٥٩}{١٣٧}$ و $\frac{٣٩}{١٣٧}$ بهذه
الصورة $\frac{٥٩}{١٣٧}$ و $\frac{٣٩}{١٣٧}$ و $\frac{٥٩}{١٣٧}$ فتتبع قاعدة هي انه متى علم مجموع
عددتين وقاضيهما استخرج الاكبر منهما بقسم نصف القاضى الى نصف المجموع
واستخرج الاصغر بطرح نصف القاضى من نصف المجموع
•(في الكميات السالبة)•

(١) متى كانت الكمية المراد طرحها اكبر من الكمية التي يراد الطرح
منها كانت عملية الطرح غير ممكنة لكن لبيان النتائج بكيفية مختصرة استنبوا
طرح الكمية الصغرى من الكبرى ووضع العلامة — امام النتائج أى
الباقى

فاذا اريد مثلا طرح العدد ٧ من العدد ٥ بطرح العدد ٥ من
العدد ٧ فيكون الباقي ٢ فيوضع امامه علامة — فيكون
حينئذ — ٢ وكذلك اذا اريد طرح ٩ من ٤ من $٤ - ٩$
فأعملية غير ممكنة لأنه لا يمكن طرح تسعة امثال ٩ من اربعة امثال
 ٤ فاذا ن بطرح اربعة امثال ٩ من تسعة امثال ٤ فالباقي
يكون $٥ - ٩$ وبوضع العلامة — امامه يكون الناتج — $٥ - ٩$
فكل من المقدارين — ٢ و — $٥ - ٩$ يسمى بالكمية السالبة

وينبج من ذلك أن الكميات السالبة هي الكميات المسبوقة بالعلامة —
وما الكميات الموجبة فهي الكميات الخالية منها او المسبوقة بالعلامة +
فعلى مقتضى ذلك تكون الكميات السالبة ناتجة من عملية طرح غير ممكنة

مثال ذلك

تاجر ربح في السنة الاولى مبلغا قدره * وخسر في السنة الثانية مبلغا
قدره * فما يكون حال رأس ماله

فالجواب

(٧) *

- فالجواب أن يقال إذا كان الربح > أكبر من الخسارة & رأس المال يزيد بقدر > - & لكن إذا كانت الخسارة والربح بائنان < > فقد نقص رأس المال بقدر > - & فإذا نكس > > الدالة على زيادة رأس المال لا تدل الأعلى عملية طرح مستحيل حيث كان < > في طرح الأصغر من الأكبر وتوضيح العلامة - أمام الباقي ليعلن أن الناتج ليس ربما يضم إلى رأس المال بل خسارة تطرح من رأس المال فإذا فرض أن > = ٧٠٠٠ و < = ٤٠٠٠ فإنه يوجد ربح قدره ٣٠٠٠ وإذا فرض أن < = ٤٠٠٠ و > = ٧٠٠٠ فإنه يوجد خسارة قدرها ٣٠٠٠ لكن يقال على وجه الطرد أن رأس المال ربح بقدر - ٣٠٠٠ ولو كان ذلك خلاف المعتاد

(٥) وإذا اعتبرنا حيث في المقدار > - & أن المقدار > ثابت والمقدار > مترادف من ابتدا الصفر حدثت نواتج متناقصة حتى كان > = > يكون الفرق > - & مساويا لصفر وإذا استقر المقدار > في ازدياده حدثت كميات سلبية وكلما كانت > كبيرة كانت هذه الكميات السلبية < كبيرة أيضا باعتبار مقاديرها المطلقة فإذا فرض > = ٣ وفرض على التوالي

< = ٠ و ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦ و ٧ و ٨ و ٩ و ١٠ والخ كانت مقادير

< = ٠ و ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦ و ٧ و ٨ و ٩ و ١٠ والخ وحيث أن المقادير السالبة معاكبة للمقادير الموجبة التي هي ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦ و ٧ و ٨ و ٩ و ١٠ تعتبر أصغر من صفرو من حيث أن الكميات السالبة < كبيرة المقدار المطلق تأتي بعد الكميات السالبة الصغيرة المتدثر اعتبارا قل منها وهذا يشاهدان

- ٢ أصغر من صفر و - ٥ أصغر من - ٢ وباستعمال علامتين < و > يكون

• (٨) •

$$- < 0 \text{ و } 0 < - \text{ أو } 0 < - \text{ و } - < 0$$

وينتج من ذلك أن كل كمية سالبة أصغر من صفرو أن أصغر الكميتين السالبتين
ما كان مقداره المطلق أكبر

• (الباب الأول) •

• (في العمليات الجبرية) •

• (في تعاريف الحدود المتشابهة واختصارها) •

(٦) كل كمية دخل فيها حرف أو جهة حرف تسمى كمية جبرية أو مقداراً
جبرياً كمية وكل كمية جبرية تخطأ جزاؤها من العلامتين $-$ و $+$
تسمى حداً أو كمية ذات حد وكل كمية مركبة من جرتين فأكثر تسمى
العلامة $-$ أو $+$ تسمى كمية ذات حدود ثم إن كانت الكمية محتوية
على حدين سميت ذات الحدين وإن كانت محتوية على ثلاثة سميت ذات الثلاثة
حدود فإذا كانت $+$ و $-$ من نوع ذات الحدين

(٧) إذا وضع في المقدار الجبري أعداد بدل الحروف وأجريت عليها
العمليات المتوقعة بها فالمقدار الناتج يسمى المقدار الرقي

• (مثال ذلك) •

إذا فرض في حد $4x^2y^3$ أن $x = 2$ و $y = 1$ يكون
مقداره الرقي $4 \times 8 = 32$ ومن البديهي أن المقدار الرقي
الكمية ذات حدود لا يتغير كائناً ما كان ترتيب كتابتها لأن النتائج
لا يتغير بتغير ترتيب الجبري لأجل عمليات جمع أو طرح

(٨) كل مضروب يدخل في حد يسمى أصلاً لهذا الحد وعدد هذه
المضاريب يسمى درجة الحد فالحد $4x^2y^3$ مثلاً يحتوي على ستة
أصول فهو من الدرجة السادسة فحينئذ درجة الحد تساوي حاصل جمع
أسس الحروف المحتوي عليها ذلك الحد

ويقان الكميتان ذات الحدود متجانسة إذا كانتا درجة جميع حدودها

٩ (٩)

واحدة فالكمية ذات الحدود $٣' ٢' ١' - ٤' ٢' ١' - ٧' ٢' ١' + ٢' ٢' ١'$
مثلا كمية رباعية متجانسة خاصة بالدرجة

(٩) الحدود المركبة من احرف متصلة الصورة والاسم تسمى حدودا
متشابهة ومتى كانت الكميات ذات الحدود محتوية على حدود متشابهة
يمكن اختصارها بتحويل هذه الحدود الى حد واحد فالكمية ذات الحدود
 $٥' ٢' ١' - ٨' ٢' ١' + ٧' ٢' ١' - ٢' ٢' ١'$ يمكن وضعها بهذه
الصورة $٥' ٢' ١' + ٧' ٢' ١' - ٨' ٢' ١' - ٢' ٢' ١'$

لحدا $٥' ٢' ١'$ و $٧' ٢' ١'$ بدلان على خمسة امثال $٢' ٢' ١'$ زائد اربعة امثال
 $١' ٢' ١'$ أعني $١٢' ٢' ١'$ فاذن يمكن استعواضهما بكمية $١٢' ٢' ١'$
وحدا $٨' ٢' ١'$ و $٢' ٢' ١'$ يؤلان الى كمية $١٠' ٢' ١'$ كآل
الحدان الموجبان الى كمية $١٢' ٢' ١'$ فينتهذ تؤول الكميات ذات
الحدود الى $١٢' ٢' ١'$ و $١٠' ٢' ١'$ وبها يستدل على انه يلزم طرح
 $١٠' ٢' ١'$ من $١٢' ٢' ١'$ فيكون الباقي $٢' ٢' ١'$ وهو الذي آلت اليه
الكمية ذات الحدود ومثل ذلك يجري في

$٧' ٢' ١' - ٩' ٢' ١' - ٥' ٢' ١' + ٣' ٢' ١' + ٦' ٢' ١' = ١٣' ٢' ١' - ١٧' ٢' ١' =$
 $= ٤' ٢' ١'$

فالطريقة العمومية لتحويل جملة حدود متشابهة الى حد واحد ان تجمع
المكررات الموجبة والمكررات السالبة ثم يطرح المكرر الاصغر من الاكبر
وتوضع علامة الاكبر امام الناتج ثم توضع الحروف المشتركة بأسمائها الاصلية
بجانب الناتج المذكور

(في الجمع)

(١٠) جمع الكميتين $٣' ٢' ١' - ٢' ٢' ١'$ و $٤' ٢' ١' - ٥' ٢' ١'$ يجري العمل
هكذا

• (١٠) •

$$٣ - ٢ = ١$$

$$٤ - ٥ = ١$$

$$٣ - ٢ + ٤ - ٥ = ٠$$

فيضم أولا ٤ الى ٣ - ٢ بان يوضع ٤ بعد ٣ - ٢
بالعلامة + فيحصل ٣ - ٢ + ٤ - ٥ وحيث ان هذا الناتج
أكبر من المطلوب بالمقدار ٥ و يطرح ٥ من ٣ - ٢ + ٤
اي يكتب ٥ و بعدم بالعلامة - فاذن يكون حاصل الجمع المطلوب
٣ - ٢ + ٤ - ٥ = ٠

وان كان حاصل الجمع محتويا على حدود متشابهة وجب اختصارها
فالقاعدة العمومية لجمع الكميات ان تكتب متتالية كما هي موجودة ثم
تختصر الحدود المتشابهة ان وجدت

• (تنبيه) •

توضع الحدود المتشابهة للكميات ذات الحدود تحت بعضها في العمل ثم يكتب
من اول الامر الحاصل بالاختصار وصورة العمل هكذا

$$\begin{array}{r} ٨ - ٥ + ٣ - ٧ \\ ٦ - ٥ + ٤ - ٧ \\ ٥ - ٤ + ٣ - ٧ \\ ٢ - ٥ + ٣ - ٧ \\ \hline ١١ - ٢ + ٢ - ٢ \end{array}$$

• (في الطرح) •

(١١) طرح الكمية ذات الحدود ٦ - ٤ من الكمية
ذات الحدود ٥ - ٢ يجري العمل هكذا

$$\begin{array}{r} ٥ - ٢ \\ ٦ - ٤ \\ \hline ٥ - ٢ + ٦ - ٤ \end{array}$$

فبطرح

قيل طرح من الكمية ذات الحدود $٥ د^٣ - ٢ د^٢ - ٢ د$ أولا التكمية
 $٦ د^٢$ بكتابتها بعدها بالعلامة $-$ فيحصل $٥ د^٣ - ٢ د^٢ - ٢ د + ٦ د^٢$
 $- ٦ د^٢$ لكن حيث بان $٦ د^٢$ أكبر من المطروح بقدر $٤ د^٢$
 فالناتج وهو $٥ د^٣ - ٢ د^٢ - ٢ د + ٦ د^٢$ يكون أصغر من الناتج
 الحقيقي بقدر $٤ د^٢$ فيضم لهذا المقدار بالعلامة $+$ فيكون الناتج
 حيث هكذا

$$٥ د^٣ - ٢ د^٢ - ٢ د + ٦ د^٢ + ٤ د^٢$$

وإذا كان الناتج الذي هو باقي الطرح محتويا على حدود متشابهة وجب
 اختصارها

فالقاعدة العمومية لطرح كمية من أخرى أن تكتب الكمية التي يراد
 طرحها بجانب الأخرى مع تغيير جميع علامات حدودها واختصار الحدود
 المتشابهة أن وجدت

(تنبيهان) :

الاول إذا اريد بيان باقي الطرح من غير إجراء العمل في المثال السابق وضع
 بهذه الصورة

$$٥ د^٣ - ٢ د^٢ - ٢ د - (٦ د^٢ + ٤ د^٢)$$

اعنى للدلالة على طرح كمية ذات حدود من مثلها فتعصر الكمية التي يراد
 طرحها بين قوسين بهذه الصورة () وتكتب بجانب المطروح منه جهة
 اليسار مفصولة بالعلامة $-$ وإذا اريد إجراء عملية الطرح يحدف
 القوسان وتغير علامة الحدود المحصورة بينهما

الثاني متى وجدت حدود متشابهة وضعت في العمل تحت بعضها ثم تغير
 علامات المطروح وتختصر الحدود المتشابهة وهالك كيفية العمل

$$٤ د^٣ - ٢ د^٢ - ٢ د + ٦ د^٢ + ٤ د^٢$$

$$٢ د^٣ - ٢ د^٢ - ٢ د + ٤ د^٢ + ٤ د^٢$$

$$٢ د^٣ - ٢ د^٢ - ٢ د + ٨ د^٢$$

• (١٣) •

١٢ : ٦ × ٢ × ٤ × ٥ = ١٢ : ٦ × ٢ × ٤ × ٥ وهذا هو حاصل الضرب المطلوب

فالقاعدة للعمومية لضرب حد في آخر أن يضرب ابتداً مكرراً الحد الأول في مكرراً الحد الثاني ثم يكتب على شمال حاصل الضرب المسد كوراء الحروف التي لم تكن مشتركة في كل من المقروين كما هي ثم يكتب الحرف المشترك باس مساو لحاصل جمع اسبيه في المقروين

• (تنبيه) •

الحالات الثلاث المحصورة في هذه القاعدة العمومية تسمى قاعدة المكررات وقاعدة الحروف وقاعدة الاسس

(١٤). لضرب كمية ذات حدود في مثلها نحو : ٤ في ٥ - ٥

يجرى العمل هكذا

٥ - ٤ مضروب

٥ - ٥ مضروب فيه

٥ - ٥ - ٥ - ٥ - ٥ - ٥ حاصل الضرب

في ضرب اولا ٥ - ٤ في ٥ حاصل ضرب ٥ في ٥ يكون ميئنا بالحد ٥ غير أنه بضرب ٥ في ٥ ازداد المضروب بقدر ٥ فإذا يكون حاصل الضرب ازيد بمقدار ٥ مضروباً في ٥ مري بمقدار ٥ فيلزم أن يطرح ٥ من ٥ فيصير ٥ - ٥ وبأخذ ٥ مضروباً فيه يزداد بمقدار ٥ لحاصل الضرب ٥ - ٥ يكون ازيد بحاصل ضرب ٥ - ٤ في ٥ المساوي ٥ - ٥ كما تقدم في إيجاد حاصل ضرب ٥ - ٤ في ٥ فإذا طرح حاصل الضرب ٥ - ٥ - ٥ - ٥ - ٥ - ٥ - ٥ من ٥ - ٥ فالناتج ٥ - ٥ - ٥ - ٥ - ٥ - ٥ - ٥ هو حاصل الضرب المطلوب وينتج من ذلك أنه لضرب كمية ذات حدود في مثلها يجب أن يضرب كل حد من المضروب في كل حد من المضروب فيه ويقرن كل حاصل جرى بالعلامة + إذا وقعت علامتا مضروبيه وبانحلامه - إذا اختلفت

علامتاها مثال ذلك أن يراد ضرب

$$5^0 5^0 - 5^2 5^2 + 5^4 5^4 - 5^6 5^6 + 5^8 5^8 \text{ في } 5^0 5^0 - 5^2 5^2 + 5^4 5^4 - 5^6 5^6 + 5^8 5^8$$

وليتنبه الى انه متى اجريت عملية الضرب كما تقدم تقتصر الحدود المتشابهة من الحاصل ان وجدت وتسهل هذه العملية بترتيب المضروبان بالنسبة للدرجة التصاعديّة أو التنازليّة لحرف واحد فيهما .

ويقال ان الكمية مرتبة بالنسبة للدرجات التصاعديّة أو التنازليّة لحرف متى كانت اساس هذا الحرف آخذة في التصاعداً والتنازل من ابتدا الحد الاول الى الحد الاخير فاذا اجريتا هذا الترتيب على المضروبين المتقدمين بالنسبة للدرجات التنازليّة لحرف 5 يحدث

$$5^0 5^0 - 5^2 5^2 + 5^4 5^4 - 5^6 5^6 + 5^8 5^8$$

$$5^0 5^0 - 5^2 5^2 + 5^4 5^4 - 5^6 5^6 + 5^8 5^8$$

$$5^0 5^0 - 5^2 5^2 + 5^4 5^4 - 5^6 5^6 + 5^8 5^8$$

$$5^0 5^0 - 5^2 5^2 + 5^4 5^4 - 5^6 5^6 + 5^8 5^8$$

$$5^0 5^0 - 5^2 5^2 + 5^4 5^4 - 5^6 5^6 + 5^8 5^8$$

$$5^0 5^0 - 5^2 5^2 + 5^4 5^4 - 5^6 5^6 + 5^8 5^8$$

فيهم غاية الاهتمام بوضع الحدود المتشابهة تحت بعضها في اجراء عمل المضارب الجزئية وبعد اجراء الاختصار يحدث عين ما هو

$$5^0 5^0 - 5^2 5^2 + 5^4 5^4 - 5^6 5^6 + 5^8 5^8$$

فالقاعدة العمومية لتحصيل حاصل ضرب كيتين ذاتي حدود في بعضهما ان ترتب هاتان الكميتان بالنسبة للدرجات التصاعديّة أو التنازليّة لحرف واحد فيهما ويضرب كل حد من المضروب في كل حد من المضروب فيه ثم يقرن حاصلها بالعلامة + اذا التحدت علامتاها أو بالعلامة - اذا

اختافت علامتهما ثم تختصر الحدود المتشابهة أن وجدت

• (تنبيه) •

مق رتب مضروبيا حاصل ضرب بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف واحد
فحاصل ضرب الحد الاول من المضروب في الحد الاول من المضروب في نفسه
يحتوى على حرف الترتيب بأس اكبر من كل من أسسه في الحواصل الاخر
البارزية لانهما الحدان المشتقان على حرف الترتيب بأس اكبر من أس كل
من الحدود المشتقة على الحرف المذكور وحيث وجد حاصل برئ لا يمكن
اختصاره مع آخر ~~يكون~~ هو الحد الاول لحاصل الضرب المطلوب المرتب
بترتيب مضاربه

ومثل ذلك يقال في حاصل ضرب الحد الاخير من المضروب في الحد الاخير
من المضروب ~~في~~ فيكون هو الحد الاخير لحاصل الضرب المطلوب

ومثل ذلك يقال ايضا في ترتيب الكهيتين ذاتي الحدود بالنسبة للدرجات
التصاعدية لحرف فيكون أس الحد الاول لحاصل الضرب الاصل اصغر من
أس كل من الحدود الاخر وأس الحد الاخير اكبرها

فعلى ذلك اذا كان حاصل الضرب مرتبا بترتيب مضروبيه فالحد الاول منه
يكون في الحقيقة حاصل ضرب الحد الاول من المضروب في الحد الاول من
المضروب فيه والحد الاخير منه يكون في الحقيقة حاصل الضرب للحد الاخير
من المضروب في الحد الاخير من المضروب فيه

(١٥) اقل عدد الحدود التي يشتمل عليها حاصل ضرب كيتين ذاتي حدود
في بعضهما اثنان لانه قد ثبت ان حاصل ضرب كيتين ذاتي حدود ~~يكون~~
مشتقا اقل ما هنالك على حدين لا يمكن اختصارهما واكثر عدد الحدود
التي يشتمل عليها حاصل ضرب كيتين ذاتي حدود في بعضهما ~~يكون~~ ما ويا
لحاصل ضرب عدد حدود المضروب في عدد حدود المضروب فيه اذا لم يحتو
هذا الحاصل على حدود يمكن اختصارها

(١٦) حاصل ضرب كيتين ذاتي حدود متجانسة كية ذات حدود متجانسة

درجتها متساوية لحاصل جمع درجتي مضروبيه الان درجة كل حاصل ضرب
نحزني تساوي حاصل جمع درجتي مضروبيه كما هي قاعدة ضرب حدين في بعضهما
واذا احتوت الكمية ذات الحدود على حرف اسمه متعدي بعض حدودها
وفي جميعها اعتبرت هذه الحدود حدا واحدا بان تنحصر هذه الحدود بين
قوسين ماعدا الحرف المذكور وتعمل ~~ك~~ كزوال الحرف المذكور مثال ذلك

$$x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 z - x^2 y z^2 - x^2 y z - x^2 y z^2 \quad \text{مترجم هكذا}$$

$$(x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 z - x^2 y z^2 - x^2 y z - x^2 y z^2)$$

فالكمية $x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 z - x^2 y z^2 - x^2 y z - x^2 y z^2$ تعتبر ~~ك~~ كزوال الحرف z وهي مرتبة
بحسب الدرجات التنازلية للحرف z ولك ان ترتبها بحسب الدرجات
التنازلية للحرف z هكذا

($x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 z - x^2 y z^2 - x^2 y z - x^2 y z^2$)
ويمكن وضع الكمية ($x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 z - x^2 y z^2 - x^2 y z - x^2 y z^2$) مرتبة بهذه
الصورة

$$\begin{array}{c|c} x^2 y^2 z^2 & x^2 y^2 z^2 \\ x^2 y^2 z & x^2 y^2 z \\ x^2 y z^2 & x^2 y z^2 \\ x^2 y z & x^2 y z \end{array}$$

وسياق استعمال ذلك في القسمة وحل المعادلات الحرفية واجراء عملية
الضرب ~~ي~~ يكون على كفيق الوضعين المتقدمين وهما مثال توضيح
ذلك

• (الكيفية الاولى) •

$$\begin{array}{r} \text{مضروب} \quad (x^2 - y^2) - (x^2 + y^2 + x^2 y^2 + y^2 x^2) \\ \text{مضروب فيه} \quad (x^2 + y^2) + (x^2 + y^2) \\ \hline (x^2 - y^2) - (x^2 + y^2 + x^2 y^2 + y^2 x^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (x^2 - y^2) - (x^2 + y^2 + x^2 y^2 + y^2 x^2) \\ \hline (x^2 - y^2) - (x^2 + y^2 + x^2 y^2 + y^2 x^2) \end{array}$$

فاذا

فَإِذَا تَعَدَّضُ بِتَوَضُّعٍ فِي آخِرِ ضَرْبٍ أَصْلِي خَفِيفًا نَشَّكَ الْمَتَادَ بِشَرْوِضٍ نَاصِلٍ -
الضرب الجزئي في مرتبته

+	+	+	+
-	-	-	-
+	+	+	+
-	-	-	-

مضروب

	S	A	-	F		S	E	+
M	S	E	+			M	S	-
C	S	r	-			M	S	+
M	S	E	-			C		-

حاصل الضرب	$\begin{matrix} 2 & 4 & - \\ 2 & 2 & + \\ 2 & 2 & - \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 8 & - \\ 2 & - \\ 2 & 2 & + \\ 2 & - \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 & 4 & + \\ 2 & - \end{matrix}$
------------	---	--	--

(١٧) الأولى اذا اجريت عملية ضرب $(x + 2)$ في $(x + 2)$ أية مربع $x + 2$ يحدث

● (●) ●

وننتج من ذلك أن مربع كمية ذات حدين يحتوى على مربع الحد الاول زائدا
ضعف حاصل ضرب الحد الاول في الثانى زائدا مربع الحد الثانى

الثانية اذا ضرب $x^2 + 2x + 1$ فى $x + 1$ يحدث مكعب $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
أى $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

وننتج من ذلك أن مكعب كمية ذات حدين يحتوى على مكعب الحد الاول
زائدا حاصل ضرب ثلاثه امثال تربيع الاول فى الثانى زائدا حاصل ضرب
ثلاثة امثال الاول فى تربيع الثانى زائدا مكعب الثانى

الثالثة اذا ضرب $(x + 1)(x - 1)$ فى $(x - 1)$ ينتج
 $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$

وننتج من ذلك ان حاصل ضرب مجموع كيتين فى فاضلهما يساوى الفرق بين
مربعيهما فيكون الفرق بين مربعى كيتين مساويا لحاصل ضرب مجموع جذريهما
فى قاضل الجذرين مثال ذلك

$$25x^2 - 9x^2 = (5x + 3x)(5x - 3x) \quad \text{وكذا}$$

$$x - 1 = (x + 1)(x - 1) \quad \text{• (فى القسمة) •}$$

(١٨) اذا كان المطلوب قسمة حد على اخر يقال

اولا مكرر خارج القسمة يستخرج رثن تقسيم مكرر المقسوم على مكرر
المقسوم عليه لان المقسوم يكون مساويا لحاصل ضرب المقسوم عليه
فى خارج القسمة وحيث أن مكرر حاصل ضرب يساوى حاصل ضرب مكررى
مضروبىه كافى (بند ١٣) يكون مكررا المقسوم مساويا لحاصل ضرب
مكررا المقسوم عليه فى مكرر خارج القسمة فحينئذ يكون مكرر خارج القسمة
ساويا لمكررا المقسوم مقسوما على مكرر المقسوم عليه كما فى قاعدة الاس
ومانيا اذا كان المتقسم محتويا على حرف ليس فى المقسوم عليه يكتب
فى خارج القسمة عين ما فى المقسوم لان المقسوم هو حاصل ضرب المقسوم
عليه فى خارج القسمة فكل حرف ليس فى المقسوم عليه وهو داخل فى المقسوم

يكتب

يكتب في خارج القسمة (انظر بند ١٣ في قاعدة الحروف)
وثالثا اذا انقسم حرف في المقسوم والمقسوم عليه ~~ص~~ يكتب ذلك الحرف في خارج القسمة باسم مساو لاسه في المقسوم ناقصا ^{اسيه} في المقسوم عليه لان المقسوم يساوى حاصل ضرب المقسوم عليه في خارج القسمة فيبتدئ يكون اخر الحرف من المقسوم مساويا لحاصل جمع ^{اسيه} في المقسوم عليه وخارج القسمة كما في (بند ١٣) فاذا كان يكون ^{اس} الحرف من خارج القسمة مساويا لاسه في المقسوم ناقصا لاسه في المقسوم عليه (انظر قاعدة الاسس)
ورابعا اذا اتحدت علامتا المقسوم والمقسوم عليه كانت علامة خارج القسمة \div واذا اختلفت فيهما كانت علامته $-$ لانه اذا فرض أن علامة المقسوم عليه زائد وعلامة المقسوم الذي هو عبارة عن حاصل ضرب ناقص ~~يكون~~ علامتا مضروبيه متخالفة كما في (بند ١٤) وحيث أن علامة المقسوم عليه الذي هو عبارة عن احد المضروبين زائد تكون علامة خارج القسمة الذي هو عبارة عن المضروب الاخر ناقصا (انظر قاعدة

العلامات)

فالقاعدة العمومية لتقسيم حد على آخر أن يقسم مكررا المقسوم على مكرر المقسوم عليه وتكتب الحروف التي يحتوي عليها المقسوم دون المقسوم عليه عقب النتائج الاول باسمها للكتابة في المقسوم ثم تكتب الحروف المشتركة الكائنة في المقسوم والمقسوم عليه باسم مساو لفاضل اسمها الكائنة بها في المقسوم والمقسوم عليه ويوضع في خارج القسمة علامة \div اذا اتحدت علامتا الحدين وعلامة $-$ اذا اختلفت علامتاها
وايضاح هذه القاعدة يكون بتقسيم $24 \div 6 = 4$ على $24 \div 6 = 4$ هكذا

.. (تنبيه) ..

تقسيم حد على آخر غير ممكن اذا كان مكررا المقسوم غير قابل بقسمة على مكرر المقسوم عليه او كان حرف من المقسوم عليه غير موجود في المقسوم أو

يس حرف من المقسوم عليه اكبر من اسمه في المقسوم فاذا وجدت حالة من
هذه الاحوال الثلاث جعل خارج القسمة ككسر اعتيادي يختصر فقط
ان قبل الاختصار بان تحذف منه المضارب المشتركة في كل من حديه
فحينئذ خارج قسمة $\frac{24}{18} = \frac{4}{3}$ على $\frac{18}{3} = 6$ يوضع بهذا الصورة
 $\frac{24}{18} = \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \times \frac{3}{3} = \frac{4}{3}$ يحذف المضروب المشترك $\frac{3}{3}$ من
كل من الحدين

(١٩) اذا قسم $\frac{1}{3}$ على $\frac{1}{6}$ بر يا على قاعدة الاس من يحدث $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$
ومن البديهي أن $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ فاذن يكون $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ وينتج من ذلك أن كل
حرف اسمه مضرباوى واحدا

(٢٠) ولتستغل الآن بتقسيم كمية ذات حدود على مثلها ففرض أن
المقسوم $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$
والخ خارج القسمة المجهول $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$
والرموز $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$ دالة على
حدودا ياما كانت وأن المقسوم والمقسوم عليه وخارج القسمة مرتبة بحسب
الدرجات التنازلية للحرف $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$ فاذن يكون وضع العمل هكذا

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\ \times 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\ \hline 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \end{array}$$

ثم يقال من المعلوم ان المقسوم يساوى المقسوم عليه مضروبا في خارج
القسمة وتقدم في (نبيه بند ١٤) انه اذا كان حاصل الضرب ومضروبا
مرتبة بحسب حرف واحد كان الحد الاول لحاصل الضرب هو حاصل ضرب
اول حد من المضروب في اول حد من المضروب فيه فيكون 1×1 مساويا
لحاصل ضرب 1×1 واذا يستتج 1 بتقسيم 1 على 1 وحيث
علم الحد 1 يضرب المقسوم عليه في هذا الحد وي طرح حاصل الضرب من
المقسوم فينتج باق بهذه الصورة $10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$

لا يحتوي الاعلى حاصل ضرب المقسوم عليه في جزء خارج القسمة
 $\bar{+} \bar{+} \bar{+} \bar{+}$ الخ وحيث أن حاصل الضرب م $\bar{+} \bar{+} \bar{+} \bar{+}$ ومضاربه
 $\bar{+} \bar{+} \bar{+} \bar{+}$ الخ و $\bar{+} \bar{+} \bar{+} \bar{+}$ الخ مرتبة بكيفية واحدة
 يكون م مساويا لحاصل ضرب $\bar{+}$ في $\bar{+}$ (كما في تبيينه ١٤) فاذن
 ينتج $\bar{+}$ بتقسيم م على ١ ثم يضرب $\bar{+}$ في المقسوم عليه ويطرح
 الحاصل من الباقي م $\bar{+} \bar{+} \bar{+} \bar{+}$ فينتج باقي جديد بهذه الصورة
 $\bar{+} \bar{+} \bar{+} \bar{+}$ الخ ويحل ما تقدم يتوصل الى تقسيم ر على أ لحدوث
 $\bar{+}$ وهم يجرأ

فالقاعدة العمومية لتقسيم ذات الحدود على مثلها ان يرتب المقسوم
 والمقسوم عليه بالنسبة للدرجة التصاعدية او التنازلية لحرف واحد
 ثم يقسم الحد الاول من المقسوم على الحد الاول من المقسوم عليه فيحدث
 الحد الاول من خارج القسمة ثم يضرب المقسوم عليه في الحد الاول من خارج
 القسمة ويطرح الحاصل من المقسوم ثم يقسم الحد الاول من الباقي على
 الحد الاول من المقسوم عليه فيحدث الحد الثاني من خارج القسمة ثم يضرب
 المقسوم عليه في الحد الثاني من خارج القسمة ويطرح الحاصل من الباقي
 الاول فيحدث باقي ثان يقسم على الحد الاول من المقسوم عليه لحدوث الحد
 الثالث من خارج القسمة ثم يجرى العمل على هذا المنوال حتى يصير الباقي
 صفرا أو غير قابل للقسمة على الحد الاول من المقسوم عليه

• (٢٢) •

وايضاح هذه القاعدة يكون بتقسيم ذات الحدود $5718 - 5748$

$$- 5710 + 5720 + 5744 \text{ على } 574 - 570 \text{ هكذا}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\ 5718 + 5720 - 5710 + 5744 - 5748 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\ 5718 + 5720 - 5710 + 5744 - 5748 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\ 5718 + 5720 - 5710 + 5744 - 5748 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\ 5718 + 5720 - 5710 + 5744 - 5748 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\ 5718 + 5720 - 5710 + 5744 - 5748 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\ 5718 + 5720 - 5710 + 5744 - 5748 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\ 5718 + 5720 - 5710 + 5744 - 5748 \end{array}$$

فبعد ترتيب ذات الحدود بالنسبة للدرجة التنازلية للعرف $\frac{1}{2}$ يقسم

5720 على 570 فيحدث 10 وهو الحد الاول من خارج القسمة

ثم يضرب المقسوم عليه في 10 وي طرح الحاصل من المقسوم بتغير علامات

كل من الحواصل الجزئية ووضع الحاصل المذكور تحت الحدود المتشابهة

لتحدوده من المقسوم واختصار الحدود المتشابهة فيحدث باق هو

$$- 5710 + 5720 + 5744 - 5748$$

$$- 5710 \text{ من هذا الباقي على } 570 \text{ فيحدث } 10 \text{ وهو الحد الثاني}$$

من خارج القسمة ثم يجري العمل على هذا المتوال

هذا واختصار العمل يكون بضرب كل حد من خارج القسمة في المقسوم

عليه وطرحه مع اختصار الحدود المتشابهة الموجودة فيه وصورة العمل

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\ 5718 + 5720 - 5710 + 5744 - 5748 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\ 5718 + 5720 - 5710 + 5744 - 5748 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\ 5718 + 5720 - 5710 + 5744 - 5748 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \\ 5718 + 5720 - 5710 + 5744 - 5748 \end{array}$$

فبعد

فبعد استنتاج ٢٧ اعني الحد الاول من خارج القسمة يضرب ٢٧ في ٢٥ فيحدث ٦٧٥ وطرحه يجعل $- ٢٢٥$ وحاصل ضرب ٢٥ في ٩ في ٢٧ يحدث عنه ٦٢٨ وطرحه يجعل $- ٢٢٨$ وهو حد يقبى اختصاره مع $+ ١٨$ فيصير $- ١٠$ ثم يجرى العمل على هذا الاسلوب .
(تبيينان)

الاول متى كان باقى عملية القسمة غير صفر كل خارج القسمة يكسر بسطه الباقي المذكور ومقامه المقسوم عليه

الثاني تقسيم ذات الحدود على مثلها غير ممكن متى كان الحد الاول من المقسوم غير قابل للقسمة على الحد الاول من المقسوم عليه او كان الحدان الاخيران منهما كذلك او كان الحد الاول من اى باقى لا يقبل القسمة على الحد الاول من المقسوم عليه او كان المقسوم والمقسوم عليه مرتين بالنسبة لدرجات التنازلية لحرف كالحرف $س$ وكان حاصل جمع اى هذا الحرف في الحد الاخير من المقسوم عليه وخارج القسمة اصغر من اسه في الحد الاخير من المقسوم لانه اذا اجريت عملية القسمة وانتهت بدون باقى فالحد الاخير من المقسوم يكون مساويا لحاصل ضرب الحد الاخير من المقسوم عليه في الحد الاخير من خارج القسمة فاذن يكون اى $س$ في الحد الاخير من المقسوم مساويا لحاصل جمع اى هذا الحرف في الحدين الاخيرين من المقسوم عليه وخارج القسمة وهذا مناقض لما فرضناه من ان حاصل جمع اى الحدين الاخيرين من المقسوم عليه وخارج القسمة اصغر من اى الحد الاخير من المقسوم مع ان اى $س$ يجب ان يكون دائما متناقصا في خارج القسمة

وصكذلك لا تكون اقسمة ممكنة متى كانت ذات الحدود مرتين بحسب الدرجات التصاعدية لحرف كالحرف المذكور وكان حاصل جمع اى هذا الحرف في الحد الاخير من المقسوم عليه وخارج القسمة اكبر من اسه في الحد الاخير من المقسوم

(٢١) قد يكون حرف الترتيب في ذات الحدود بأس واحد في حدين أو أكثر فيجرب عليها مائة من الوضع في (بند ١٦) بأن توضع على إحدى صورتين المتقدمتين مثال ذلك

٢٢ ٢٢ ٢٢
٥٢٥ — ٥٢٨ — ٥٢٣ فيمكن وضعها على إحدى هاتين الصورتين

$$\begin{array}{r|l} ٢ & ٥٠ + \\ ٢ & ٥٨ - \\ ٢ & ٥٢ - \end{array} \quad \text{أو} \quad \begin{array}{l} ٢ \\ ٢ \\ ٢ \end{array} (٥٢ - ٥٨ - ٥٢)$$

اليتين بدل وضع ٢ فيهما على أنه مضروب في الجمله ٥٢ — ٥٨ — ٥٢

معتبرة مكررا لحرف الترتيب ٢ ولا تجرى في أعمال التقسيم الآتية الا على

الصورة الثانية فاذا اريد تقسيم ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢

على ٢ + ٢ فالكررات ١ و ٢ و ٢ الخ و ٢ و ٢ تدل على

كميات ذات حدود حيث أن الاس اعظم للعرف ٢ في المقسوم ٢

واسه في المقسوم عليه واحد ويكون اسه في خارج القسمة ٢ وحيث أن أصغر

أس للعرف ٢ في المقسوم والمقسوم عليه صفر يكون في خارج القسمة

صفر ايضا ويكون الخارج بهذه الصورة ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢

فعلى ذلك لا يزم لمعرفة خارج القسمة الا بتعيين المكررات ١ و ٢ و ٢ الخ

وصورة العمل هكذا

$$\begin{array}{r|l} ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ & ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ \\ ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ & ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ \\ \hline & ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ \end{array}$$

فتعين المكرر ٢ يجب التنبه على أنه اذا ضرب المقسوم عليه في خارج

القسمة فال حاصل الجزء من الناتج من ضرب ٢ في ٢ لا يختصر مع

حدود الخوس الكلي لأنه يحتوى على اس ٢ بدرجة اعلا من درجته

•(٢٦)•

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 ٢ \\
 ٥٢ - ٥ + ٥ \\
 \hline
 ١ + ٥ \quad ٥٢ + ٥ \quad ٥٣ - ٥٢ \\
 ١ - \quad ٤ +
 \end{array}
 &
 \begin{array}{r}
 ٢ \quad ٢ \quad ٢ \quad ٢ \\
 ٥٣ \quad ٥٢ - ٥ + ٥ \quad ٥٩ - ٥ \quad ٥٢٢ + ٥ \quad ٢٠ - ٥ \quad ٥٢ + \\
 ٥ - \quad ٥ - \quad ٥٢١ - \quad ٥٢٣ + \quad ١٠ - \\
 ٢ \quad ٢ \\
 ٥٢ + \quad ٥ + \quad ٥٧ - \\
 ٥٥ + \quad ٢٥٢ - \\
 \hline
 ٢ \quad ٢ \\
 ٥١٢ + \\
 ٥٢٢ - \\
 ٥ +
 \end{array}
 \end{array}$$

ثاني قسمة جبرية

اول قسمة جبرية

$$\begin{array}{r|l}
 ٥ - ٥٣ & ٢٠ - ٥٢٧ + ٥٩ - \\
 ٤ + ٥٣ - & ٢٠ - ٥١٢
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 ٥ - ٥٣ & ١٠ - ٥٦ \\
 ٥ - ٢ &
 \end{array}$$

رابع قسمة جبرية

ثالث قسمة جبرية

$$\begin{array}{r|l}
 ٥ - ٥٣ & ٥ - ٥٣ \\
 ١ & ٠٠ \quad ٠٠
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 ٥ - ٥٣ & ٥ + ٥٢٣ - ٥١٢ \\
 ١ - ٥٢ & ٥ + ٥٣ -
 \end{array}$$

فيلزم أن يكون الحد الاول من خارج القسمة محتويا على ٥٣ ولتحصيل
 مكرره يقسم مكرر $١٠ - ٥٦$ على مكرر $٥ - ٥٣$ (وهذا اول قسمة
 جبرية) وناتجها ٢ فاذن يكون الحد الاول من خارج القسمة ٥٢
 ثم يضرب المقوم عليه في ٥٢ أي يضرب $٥ - ٥٣$ في ٥٢ فيحصل $١٠ - ٥٦$

هكذا

(٢٧) ٩

وهذا الحد يحتاج مع اول سجد من المقسوم وحيث أن حاصل ضرب الباقي

من المقسوم عليه لـ ٢٠ يقبل الاختصار مع الجزء التالي من المقسوم

$$\begin{array}{r} \text{يقول هذا الحاصل بعد اختصاره الى} \\ 20 \quad - \quad 27 \quad + \quad 9 \quad - \end{array}$$

وحيث ان الجزء التالي من خارج القسمة يجب أن يكون محتويا على

فلتعيين مكرره قسم ٢٠ - ٢٧ + ٩ - ٩ على ٢ - ٩

(وهذه هي ثانی قسمة جبرية) ثم يجري العمل على هذا المنوال ٩ - ٩

(٢٢) وهناك حانة شهيرة في التقسيم الجبري وهي الحالة التي يكون فيها

المقسوم عليه غير محتوي على حرف الترتيب المقسوم كما اذا اريد تقسيم الكمية

ذات الحدود ا م - م + م - م على م فالكررات ا و -

و م و م يمكن أن تكون كميات ذات حدود وحيث أن م لا يحتوي

على الحرف م يكون خارج القسمة محتويا على حرف الترتيب بدرجة

الكائن بها في المقسوم وبناء عليه يكون بهذه الصورة ا م - م + م - م

+ م فاذا لا يحتاج الاتعين المكررات ا و م و م فحواصل

ضرب المقسوم عليه في حدود خارج القسمة تكون م ا م - م و م - م

و م وهي حواصل لا يقبل بعضها الاختصار مع الآخر لانها محتوية على

م باسس مختلفة فتكون حينئذ مساوية للجزء الباقي لها من المقسوم

كل لتظيره فيجدت حينئذ يحدف المضارب المشتركة م و م ا م

$$\begin{array}{l} \text{ا م} = \text{ا} \\ \text{م م} = \text{م} \text{ وينتج من ذلك} \\ \text{م م} = \text{م} \\ \text{م م} = \text{م} \end{array}$$

فحينئذ يقال متى كان المقسوم عليه خاليا من حرف ترتيب المقسوم يلزم لا مكان

القسمة أن يكون مكرر كل قوة لهذا الحرف من المقسوم قابلا للقسمة على المقسوم عليه وان يكون حرف الترتيب داخل في خارج القسمة باسم عين اسمه في المقسوم ثم يستخرج كل مكرر من خارج القسمة بتقسيم مكرر كل قوة لحرف الترتيب من المقسوم على المقسوم عليه ولتطبيق هذه القاعدة على مثال فنقول

إذا اريد تقسيم $٥٦ + ٨٥ - ٩٥ - ٥٩ + ٤٥ - ٢٧$ على $٥٢ - ٩$ فوضع صورة العمل كما سبق في الحالة المتقدمة هكذا

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 ٥٢ - ٩ \\
 \hline
 ٥٦ + ٨٥ - ٩٥ - ٥٩ + ٤٥ - ٢٧ \\
 ٥٢ + ٩ \\
 \hline
 ٤ + ٧٦ - ١٠٤ - ٥٠ + ٥٤ - ٢٧ \\
 ٤ + ٧٦ - ١٠٤ - ٥٠ + ٥٤ - ٢٧ \\
 \hline
 ٠
 \end{array}
 \end{array}$$

القسمة الجزئية الثانية

$$\begin{array}{r}
 ٥٢ - ٩ \\
 \hline
 ٥٦ + ٨٥ - ٩٥ - ٥٩ + ٤٥ - ٢٧ \\
 ٥٢ + ٩ \\
 \hline
 ٠
 \end{array}$$

القسمة الجزئية الاولى

$$\begin{array}{r}
 ٥٢ - ٩ \\
 \hline
 ٥٦ + ٨٥ - ٩٥ - ٥٩ + ٤٥ - ٢٧ \\
 ٥٢ + ٩ \\
 \hline
 ٠
 \end{array}$$

القسمة الجزئية الثالثة

$$\begin{array}{r}
 ٥٢ - ٩ \\
 \hline
 ٥٦ + ٨٥ - ٩٥ - ٥٩ + ٤٥ - ٢٧ \\
 ٥٢ + ٩ \\
 \hline
 ٠
 \end{array}$$

(٢٣) مما يحتاج اليه غالب التحليل مقدار جبري الى حاصل ضرب مركب من مضروبين احدهما معلوم والاخر مجهول ومن البديهي ان استخراج المضروب المجهول يسكن بتقسيم الكمية الجبرية المقروضة على المضروب المعلوم

فاذا اريد مثلا تحويل $١٢٥ - ٢٤$ الى مضروبين احدهما ٥٤

مث (٣٠) ٤

هذا الحاصل قابلا للقسمة على $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ أن يصحكون احد مضروبيه

($\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$) قابلا للقسمة على $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ فاذا كان $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$

قابلا للقسمة على $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ يكون $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ كذلك أعني اذا كان

فاضل الكميتين المرفوعتين الى قول واحد قابلا للقسمة على فاضل الكميتين

بلا رفع يكون فاضل الكميتين المذكورتين مرفوعتين لقوة اعلى بواحد من

قوتيهما الاصلية قابلا للقسمة على فاضل الكميتين بلا رفع

وحيث علم أن الفاضل $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ يقبل القسمة على $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ لأن $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$

$= (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})$ يصحكون $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ قابلا للقسمة على

$\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ حينئذ $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ يقبل القسمة على $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ وهكذا

فتكون هذه القاعدة عامة الاثبات

حينئذ اذا أجرى العمل على $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ يحدث

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ وعلى هذا

المثال يكون

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

فنتج من كيفية تكوين خارج قسمة $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ على $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$

اولا ان جميع حدود خارج القسمة تكون موجبة

وثانيا أن جميع المكررات تكون مساوية للوحدة

وثالثا أن اس حرف $\frac{1}{2}$ يتناقص بواحد على التوالي من ابتداء الحد

الاول الذي اسه م - $\frac{1}{2}$ الى الحد الاخير الذي اسه صفر

ورابعا أن اس حرف $\frac{1}{2}$ يتزايد بواحد من ابتداء الحد الاول الذي اسه

صفر الى الحد الاخير الذي اسه يكون مساويا (م - ١)

• (•) •

(۲۵) ولتذکرہ ناسخ فقہ قول

الاولى : ١٠٠ لا تقبل الفسحة على ...

الثانية ٢٠ — ٢١ تقبل القسمة على ٢٠ + ٢١ - إذا كان م زوجيا فان
 كان فردا فلا تقبل القسمة على ٢٠ + ٢١ -

والثالثة كـ + و تقبل القسمة على + و اذا كان م فردا
ولا تقبل القسمة على + و اذا كان م زوجا ولنبرهن على هذه
النتائج مع السهولة بواسطة القواعد الآتية فى اليند التالى وان كان يمكن
البرهنة عليها ايضا من غير واسطة باجراء عملية التقسيم على وجه التجربة اى
اختيار الحالة التى فيها تنتهى العملية والتى لا تنتهى فيها فنقول

(٢٦) اذا فرض في الكمية ذات الحدود

$m + c m + k m + \dots + r m + 1 \text{ أن } m = 0$
 وأنت به الى صفر تكون هذه الكمية قابلة للقسمة على m — لانها اذا
 اجريت قسمة هذه الكمية على m — نحو هكذا

[illegible]

يكون \bar{r} هو الحد الاول من خارج القسمة و $(e + c)$ \bar{r} هو
 اول حد من الباقي بوضع \bar{r} مضروباً مشتركاً في الحدين المحتويين على

• (5) •

مثلاً ويكون الحد الثاني من خارج القسمة $(x + 2)$ مثلاً

والحد الأول من الباقي التالي له هو $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ وهذه الكفة تدام العملية

ففي توصيل الى باقى هذه الاول لا يحتوى الاعلى من باس مساو للواحد
كان لهذا الحد الاول من هذا الباقي مكرر بهذه الصورة

١٢ + ٢٢ + ٣٢ + ٤٢ + ٥٢ + ٦٢ + ٧٢ + ٨٢ + ٩٢ + ١٠٢ + ١١٢ + ١٢٢ + ١٣٢ + ١٤٢ + ١٥٢ + ١٦٢ + ١٧٢ + ١٨٢ + ١٩٢ + ٢٠٢ + ٢١٢ + ٢٢٢ + ٢٣٢ + ٢٤٢ + ٢٥٢ + ٢٦٢ + ٢٧٢ + ٢٨٢ + ٢٩٢ + ٣٠٢ + ٣١٢ + ٣٢٢ + ٣٣٢ + ٣٤٢ + ٣٥٢ + ٣٦٢ + ٣٧٢ + ٣٨٢ + ٣٩٢ + ٤٠٢ + ٤١٢ + ٤٢٢ + ٤٣٢ + ٤٤٢ + ٤٥٢ + ٤٦٢ + ٤٧٢ + ٤٨٢ + ٤٩٢ + ٥٠٢ + ٥١٢ + ٥٢٢ + ٥٣٢ + ٥٤٢ + ٥٥٢ + ٥٦٢ + ٥٧٢ + ٥٨٢ + ٥٩٢ + ٦٠٢ + ٦١٢ + ٦٢٢ + ٦٣٢ + ٦٤٢ + ٦٥٢ + ٦٦٢ + ٦٧٢ + ٦٨٢ + ٦٩٢ + ٧٠٢ + ٧١٢ + ٧٢٢ + ٧٣٢ + ٧٤٢ + ٧٥٢ + ٧٦٢ + ٧٧٢ + ٧٨٢ + ٧٩٢ + ٨٠٢ + ٨١٢ + ٨٢٢ + ٨٣٢ + ٨٤٢ + ٨٥٢ + ٨٦٢ + ٨٧٢ + ٨٨٢ + ٨٩٢ + ٩٠٢ + ٩١٢ + ٩٢٢ + ٩٣٢ + ٩٤٢ + ٩٥٢ + ٩٦٢ + ٩٧٢ + ٩٨٢ + ٩٩٢ + ١٠٠٢ + ١٠١٢ + ١٠٢٢ + ١٠٣٢ + ١٠٤٢ + ١٠٥٢ + ١٠٦٢ + ١٠٧٢ + ١٠٨٢ + ١٠٩٢ + ١١٠٢ + ١١١٢ + ١١٢٢ + ١١٣٢ + ١١٤٢ + ١١٥٢ + ١١٦٢ + ١١٧٢ + ١١٨٢ + ١١٩٢ + ١٢٠٢ + ١٢١٢ + ١٢٢٢ + ١٢٣٢ + ١٢٤٢ + ١٢٥٢ + ١٢٦٢ + ١٢٧٢ + ١٢٨٢ + ١٢٩٢ + ١٣٠٢ + ١٣١٢ + ١٣٢٢ + ١٣٣٢ + ١٣٤٢ + ١٣٥٢ + ١٣٦٢ + ١٣٧٢ + ١٣٨٢ + ١٣٩٢ + ١٤٠٢ + ١٤١٢ + ١٤٢٢ + ١٤٣٢ + ١٤٤٢ + ١٤٥٢ + ١٤٦٢ + ١٤٧٢ + ١٤٨٢ + ١٤٩٢ + ١٥٠٢ + ١٥١٢ + ١٥٢٢ + ١٥٣٢ + ١٥٤٢ + ١٥٥٢ + ١٥٦٢ + ١٥٧٢ + ١٥٨٢ + ١٥٩٢ + ١٦٠٢ + ١٦١٢ + ١٦٢٢ + ١٦٣٢ + ١٦٤٢ + ١٦٥٢ + ١٦٦٢ + ١٦٧٢ + ١٦٨٢ + ١٦٩٢ + ١٧٠٢ + ١٧١٢ + ١٧٢٢ + ١٧٣٢ + ١٧٤٢ + ١٧٥٢ + ١٧٦٢ + ١٧٧٢ + ١٧٨٢ + ١٧٩٢ + ١٨٠٢ + ١٨١٢ + ١٨٢٢ + ١٨٣٢ + ١٨٤٢ + ١٨٥٢ + ١٨٦٢ + ١٨٧٢ + ١٨٨٢ + ١٨٩٢ + ١٩٠٢ + ١٩١٢ + ١٩٢٢ + ١٩٣٢ + ١٩٤٢ + ١٩٥٢ + ١٩٦٢ + ١٩٧٢ + ١٩٨٢ + ١٩٩٢ + ٢٠٠٢ + ٢٠١٢ + ٢٠٢٢ + ٢٠٣٢ + ٢٠٤٢ + ٢٠٥٢ + ٢٠٦٢ + ٢٠٧٢ + ٢٠٨٢ + ٢٠٩٢ + ٢١٠٢ + ٢١١٢ + ٢١٢٢ + ٢١٣٢ + ٢١٤٢ + ٢١٥٢ + ٢١٦٢ + ٢١٧٢ + ٢١٨٢ + ٢١٩٢ + ٢٢٠٢ + ٢٢١٢ + ٢٢٢٢ + ٢٢٣٢ + ٢٢٤٢ + ٢٢٥٢ + ٢٢٦٢ + ٢٢٧٢ + ٢٢٨٢ + ٢٢٩٢ + ٢٣٠٢ + ٢٣١٢ + ٢٣٢٢ + ٢٣٣٢ + ٢٣٤٢ + ٢٣٥٢ + ٢٣٦٢ + ٢٣٧٢ + ٢٣٨٢ + ٢٣٩٢ + ٢٤٠٢ + ٢٤١٢ + ٢٤٢٢ + ٢٤٣٢ + ٢٤٤٢ + ٢٤٥٢ + ٢٤٦٢ + ٢٤٧٢ + ٢٤٨٢ + ٢٤٩٢ + ٢٥٠٢ + ٢٥١٢ + ٢٥٢٢ + ٢٥٣٢ + ٢٥٤٢ + ٢٥٥٢ + ٢٥٦٢ + ٢٥٧٢ + ٢٥٨٢ + ٢٥٩٢ + ٢٦٠٢ + ٢٦١٢ + ٢٦٢٢ + ٢٦٣٢ + ٢٦٤٢ + ٢٦٥٢ + ٢٦٦٢ + ٢٦٧٢ + ٢٦٨٢ + ٢٦٩٢ + ٢٧٠٢ + ٢٧١٢ + ٢٧٢٢ + ٢٧٣٢ + ٢٧٤٢ + ٢٧٥٢ + ٢٧٦٢ + ٢٧٧٢ + ٢٧٨٢ + ٢٧٩٢ + ٢٨٠٢ + ٢٨١٢ + ٢٨٢٢ + ٢٨٣٢ + ٢٨٤٢ + ٢٨٥٢ + ٢٨٦٢ + ٢٨٧٢ + ٢٨٨٢ + ٢٨٩٢ + ٢٩٠٢ + ٢٩١٢ + ٢٩٢٢ + ٢٩٣٢ + ٢٩٤٢ + ٢٩٥٢ + ٢٩٦٢ + ٢٩٧٢ + ٢٩٨٢ + ٢٩٩٢ + ٣٠٠٢ + ٣٠١٢ + ٣٠٢٢ + ٣٠٣٢ + ٣٠٤٢ + ٣٠٥٢ + ٣٠٦٢ + ٣٠٧٢ + ٣٠٨٢ + ٣٠٩٢ + ٣١٠٢ + ٣١١٢ + ٣١٢٢ + ٣١٣٢ + ٣١٤٢ + ٣١٥٢ + ٣١٦٢ + ٣١٧٢ + ٣١٨٢ + ٣١٩٢ + ٣٢٠٢ + ٣٢١٢ + ٣٢٢٢ + ٣٢٣٢ + ٣٢٤٢ + ٣٢٥٢ + ٣٢٦٢ + ٣٢٧٢ + ٣٢٨٢ + ٣٢٩٢ + ٣٣٠٢ + ٣٣١٢ + ٣٣٢٢ + ٣٣٣٢ + ٣٣٤٢ + ٣٣٥٢ + ٣٣٦٢ + ٣٣٧٢ + ٣٣٨٢ + ٣٣٩٢ + ٣٤٠٢ + ٣٤١٢ + ٣٤٢٢ + ٣٤٣٢ + ٣٤٤٢ + ٣٤٥٢ + ٣٤٦٢ + ٣٤٧٢ + ٣٤٨٢ + ٣٤٩٢ + ٣٥٠٢ + ٣٥١٢ + ٣٥٢٢ + ٣٥٣٢ + ٣٥٤٢ + ٣٥٥٢ + ٣٥٦٢ + ٣٥٧٢ + ٣٥٨٢ + ٣٥٩٢ + ٣٦٠٢ + ٣٦١٢ + ٣٦٢٢ + ٣٦٣٢ + ٣٦٤٢ + ٣٦٥٢ + ٣٦٦٢ + ٣٦٧٢ + ٣٦٨٢ + ٣٦٩٢ + ٣٧٠٢ + ٣٧١٢ + ٣٧٢٢ + ٣٧٣٢ + ٣٧٤٢ + ٣٧٥٢ + ٣٧٦٢ + ٣٧٧٢ + ٣٧٨٢ + ٣٧٩٢ + ٣٨٠٢ + ٣٨١٢ + ٣٨٢٢ + ٣٨٣٢ + ٣٨٤٢ + ٣٨٥٢ + ٣٨٦٢ + ٣٨٧٢ + ٣٨٨٢ + ٣٨٩٢ + ٣٩٠٢ + ٣٩١٢ + ٣٩٢٢ + ٣٩٣٢ + ٣٩٤٢ + ٣٩٥٢ + ٣٩٦٢ + ٣٩٧٢ + ٣٩٨٢ + ٣٩٩٢ + ٤٠٠٢ + ٤٠١٢ + ٤٠٢٢ + ٤٠٣٢ + ٤٠٤٢ + ٤٠٥٢ + ٤٠٦٢ + ٤٠٧٢ + ٤٠٨٢ + ٤٠٩٢ + ٤١٠٢ + ٤١١٢ + ٤١٢٢ + ٤١٣٢ + ٤١٤٢ + ٤١٥٢ + ٤١٦٢ + ٤١٧٢ + ٤١٨٢ + ٤١٩٢ + ٤٢٠٢ + ٤٢١٢ + ٤٢٢٢ + ٤٢٣٢ + ٤٢٤٢ + ٤٢٥٢ + ٤٢٦٢ + ٤٢٧٢ + ٤٢٨٢ + ٤٢٩٢ + ٤٣٠٢ + ٤٣١٢ +

١-٢ + ٢-٢ + ٣-٢ + ... وبناء عليه يكون الباقي التالي لهذا الحد هو

$$J + \epsilon_1 + \dots + \epsilon_{j-1} + \epsilon_{j+1} + \epsilon_{j+2} + \dots$$

وهو باق لا يخالق الكمية ذات الحدود المقروضة الا بوضع \bullet فيه بدل \bullet فاذا اعتبر الفرض الاول المتقدم أى فرض $\bullet = \bullet$ الذى

به تؤول الكمية الى صفر فيكون الباقي وهو $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$ مساويا للصفر ويكون التقسيم مكتملا

• (في الكسور) •

(٢٧) الكسر الجبري يذل كافي الحساب على خارج قسمة البسط على

المقام فعلى هذا يكون كسر $\frac{1}{2}$ دالاً على خارج قسمة ٢ على ٤

والبراهين التي اجريت في علم الحساب لبيان القواعد المملوكة في العمليات المتعددة لا كسور ناتجة من التعريف السابق أو من تعريف يكون هذا التعريف تحته

وقد قرض في هذه البراهين أن الحدين ∞ و ∞ عددان محييان لكن هذان
الحدين قد يكونان في علم الجبر كسرين نأذن يجب علينا أن نبين جميع القواعد
المتعلقة بذلك سور فيقول

الاولى ان تشرب بسط كسر في كمية ما اؤدة سم عليها صكان ذلك الكسر

مضروبا

• (٢٣) •

مضروباً في هذه الكمية أو مقسوماً عليها فإذا فرض $\frac{2}{3}$ مثلاً كسراً معلوماً
ورمز له بالحرف ك وضرب بسطه في ٥ كان ذلك الكسر مضروباً في ٥ لأنه
ينتج من $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ أن $2 = 3$ وكذا إذا ضرب طرفاً هذه المساواة
في ٥ يحدث $10 = 15$ وكذا ومنها ينتج $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ $\frac{10}{15} \times \frac{2}{3} = \frac{20}{45}$
ومثل هذا يقال في $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$: ك : ٥

الثانية إذا ضرب مقام كسر في كمية واحدة أو قسم عليها كان ذلك الكسر
مقسوماً على هذه الكمية أو مضروباً فيها وعلى هذا يبرهن على ما تقدم
الثالثة إذا ضرب هذا الكسر في كمية واحدة أو قسم عليها فقيمة الكسر
لا تتغير ويعلم من ذلك أنه يمكن اختصار كسر بتقسيم حديده على مضروب
مشترك احتواء عليه فحينئذ

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 12}{3 \times 12} = \frac{24}{36}$$

ويعلم من ذلك أن القاعدة المستعملة في الحساب لتحويل كسور إلى ذات
مقام واحد يمكن استعمالها في التلخيص فإذا أريد مثلاً تحويل الكسور
 $\frac{2}{3}$ و $\frac{4}{5}$ و $\frac{1}{2}$ إلى ذات مقام واحد كان الناتج المطلوب بعد إجراء
العملية $\frac{20}{30}$ و $\frac{24}{30}$ و $\frac{15}{30}$ وإذا أريد تحويل الكسور
 $\frac{2}{3}$ و $\frac{4}{5}$ و $\frac{1}{2}$ إلى خواصة مقام واحد يقال حيث وجد
للمقامات مضارب مشتركاً تختصر القاعدة العمومية بأن يبحث كفاً في
الحساب عن المضاعف الأصغر المشترك للمقامات الثلاثة فيحصل أولاً كل من
المقامات إلى مضارب أولية فيحدث حصر

$$2 \times 3 \times 5 \times 2 = 60 \text{ و } 2 \times 5 \times 3 = 30 \text{ و } 2 \times 3 \times 3 = 18$$

ثم يحصل حينئذ حاصل ضرب يتولى على المضارب الأصلية المتقدمة باعلى
من موجود فيها هكذا

$$2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3$$

وهذا الحاصل هو المقام المشترك البسيط الذي يمكن اعطاؤه للكسور
المفروضة فلم يبق الا ضرب حدى كل كسر من الكسور المتقدمة في خارج
قسمة $٢ \times ٣ \times ٥ \times ٦ \times ٧$ على مقامه فاذن يضرب هذا الكسر
الاول في $٥ \times ٦ \times ٧$ والثاني في ٤×٧ والثالث في ٢×٦ فيحدث

$$\frac{٢ \times ٦ \times ٧}{٤٠ \times ٦٠} \quad \text{و} \quad \frac{٤ \times ٧}{٤٠ \times ٦٠} \quad \text{و} \quad \frac{٢ \times ٦ \times ٧}{٤٠ \times ٦٠}$$

الرابعة لطرح كسرين أو جملة كسور ذات مقام مشترك أو جملة
تجرى عملية المرح أو الجمع على البسوط ثم يعطى للناجى المقام المشترك
لانه اذا أجرى العمل على الكسور $\frac{٢}{٣} + \frac{٣}{٤} - \frac{٤}{٥}$ مثلا وفرض أن
الناجى المطلوب $م$ كان $\frac{٢}{٣} + \frac{٣}{٤} - \frac{٤}{٥} = م$ فينثب يضرب
كل من الطرفين في $م$ فيحدث

$$٢ + ٣ - ٤ = م م \quad \text{وينتج من ذلك}$$

$$م = ٢ + ٣ - ٤ = ١$$

فإذا كانت مقامات الكسور المفروضة غير متعددة ابتدئ بتحويلها الى ذات
مقام واحد ثم يجري عليها ما في القاعدة المتقدمة
الخامسة اضرب كسر في آخر يضرب بسط أحدهما في بسط الآخر ومقامه
في مقامه ويجعل الحاصل الثاني مقاما للحاصل الاول فاذا اريد ضرب
 $\frac{٢}{٣}$ في $\frac{٣}{٤}$ مثلا نفرض أن $ع$ رمز للكسر الاول و $ك$ رمز للثاني
يوجد $ع = ٢ ع$ و $ه = ٣ ه$ و $ك = ٤ ك$ فاذن يكون

$$ع \times ه = ٢ \times ٣ = ٦ \quad \text{أو} \quad ٦ = ٢ \times ٣ \quad \text{أو} \quad ٦ = ٣ \times ٢ \quad \text{أو} \quad ٦ = ٢ \times ٣$$

$$\frac{٢}{٣} \times \frac{٣}{٤} = \frac{٢ \times ٣}{٣ \times ٤} = \frac{٦}{١٢}$$

وينتج من ذلك انه لضرب صحيح في كسر يضرب الصحيح في بسط الكسر ثم يجعل
مقام الكسر المفروض مقاما لثالث الحاصل
السدسة تقسيم كسر على كسر يضرب الكسر الذي هو عبارة عن المقسوم

• (٢٥) •

في الكسر الذي هو عبارة عن المقسوم عليه مقلوبا فإذا فرض أن $\frac{a}{b}$ مقسوم
على $\frac{c}{d}$ فيجعل $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d} = \frac{c}{d}$ ~~فيكون~~ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ و $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
و $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ومنها يحدث
 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ أو $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ أو $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ أو $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
ويمثل ذلك يبرهن على تقسيم الصحيح على كسر فيضرب الصحيح في الكسر
مقلوبا

• (في الاسم السالبة) •

(٢٨) متى وجد حرف من المقسوم أسه أقل من أسه في المقسوم عليه
كانت القسمة مستفيضة تقسمه $\frac{a}{b}$ على $\frac{c}{d}$ مستفيضة لكنهم اتفقوا على
تبيين خارج القسمة بكتابة حرف $\frac{a}{b}$ باسم مساو للفاضل $\frac{c}{d} - \frac{a}{b}$ أي
 $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ فاذن يكون $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

وينتج من ذلك أنه إذا وجد حرف ذو أس سالب كان ناقصا من عملية قسمة
مستفيضة

(٢٩) الحرف ذو الاسم السالب يساوى واحدا مقسوما على هذا
الحرف باسمه موجبا فإذا قسم $\frac{a}{b}$ على $\frac{c}{d}$ تفصيل بمقتضى ما تقدم
في (٢٨)

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} = \frac{a}{b} = \frac{a}{b} = \frac{a}{b} = \frac{a}{b} = \frac{a}{b} = \frac{a}{b} = \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

يقال إذا قسم كل من حدى هذا الكسر على $\frac{a}{b}$ حدث $\frac{a}{b}$

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} = \frac{a}{b} = \frac{a}{b} = \frac{a}{b} = \frac{a}{b} = \frac{a}{b} = \frac{a}{b} = \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

(٣١) . . .

(٣٠) قد برهننا سابقا قاعدة الاسس على ضرب الحدود ذات الاسس

الموجبة فقط والغرض الآن البرهنة على ان هذه القاعدة توافق الاسس

السالبة فاصل a^{-m} في a^{-n} مثلا يكون مساويا a^{-m-n} لان $a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n}$

$$\frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} \text{ وبمثل هذا يبرهن على الحالات الاخرى}$$

فلننته قاعدة الاسس الموجبة في تقسيم الحدود توافق الاسس السالبة

لان هذه القاعدة ناتجة من قاعدة الضرب

بيان ذلك بالامثلة أن يقال

$$\text{لنضرب } a^{-m} \text{ في } a^{-n} \text{ يقال } a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)}$$

$$\text{ولقمة } a^{-m} \text{ على } a^{-n} \text{ يجري العمل هكذا } a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m-n}} = a^{-(m-n)}$$

$$\text{ولقمة } a^{-m} \text{ على } a^{-n} \text{ يجري العمل هكذا } a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m-n}} = a^{-(m-n)}$$

ولا يجاد حاصل ضرب كيتين مشتملتين على حدود كسرية او خارج قسمتها

على بعض تحويل الكميتان الى اخريين صيغتين باستعمال الاسس السالبة

من غير تغيير كميات حدودها الرقمية ثم ترتيب الاسس المذكورة باعتبارها

اعدادا اصغر من صفر تاخذ في الصغر كلما زادت في المقدار المطلق ثم تجري

$$\text{عليها طرق الضرب او القسمة فاذا اريد مثلا ضرب } \frac{1}{a^m} + \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m} + \frac{1}{a^n}$$

$$+ \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^n} \text{ في } \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^n} \text{ يوضعان هكذا}$$

• (r3) •

[illegible]

• (الباب الثاني) •

• (في المعادلات والمساائل التي بدرجة أولى) •

(٣١) الكميتان المتساويتان اللتان لا يحتويان الاعلى اعداد معلومة
مينة بحروف يسميان متساوية وذلك كالتساوية $\alpha + \delta = \beta + \gamma$ و
التي فيها α و δ و β و γ دالة على كميات معلومة
والتساوية متى تحققت بمقادير الحروف المعلومه أو المجهولة الداخلة فيها
كأنه ما كانت تسمى متطابقة وذلك كالتطابقة

والتساوية التي لا يتحقق تساويها إلا بتقدير مخصوصة لتجابهيل الماخلة فيها
تسمى معادلة خفية إذ $r = 0$ معادلة لان تساويها
لا يتحقق بأي مقدار فرض للجهول r

كل من الكميتين المتصويتين عن بعضهما في كل متساوية بالعلامة =
تسمى طرفا كذا الكمية التي على اليمين تسمى الطرف الاول والتي على اليسار

المعادلة الرقمية ما كانت الكميات المعلومة فيها مبينة بارقام والحرفية ما كانت
 الكميات المذهب كورة فيها مبينة بحروف فحينئذ $x = 0$ $y = 0$ $z = 0$ معادلة حرفية
 وحل المعادلة هو البحث عن المقدار الذي اذا وضع بدل مجهولها صيرها
 متطابقة ويسمى هذا المقدار بحل المعادلة
 حتى تحققت جملة معادلات بجملة واحدة من مقادير مجاهيلها تسمى هذه
 المقادير بحل جملة هذه المعادلات فحل هذه المعادلات هو البحث عن المقادير
 التي اذا وضعت بدل المجاهيل صيرتها متطابقة
 وهذه المعادلات تتنازعا عن الاخرى بدرجتها
 واذا جمعت اسس مجاهيل كل حدة من معادلة فاعظم حواصل الجمع يدل على
 درجة المعادلة فحينئذ معادلة $x = 0$ $y = 0$ $z = 0$ معادلة ذات درجة
 اولى ومعادلة $x = 0$ $y = 0$ $z = 0$ معادلة ذات درجة ثانية
 ومعادلة $x = 0$ $y = 0$ $z = 0$ معادلة ذات
 درجة ثالثة
 وهذه القضية غير مطردة متى كان المجهول داخلا في المعادلة مقام الكسر
 اذ لا يصحكم بدرجة المعادلة في هذه الحالة الا بعد حذف المقامات
 بالطريقة الآتية
 وتتميز المعادلات المتصلة الدرجة عن بعضها بعدد مجاهيلها
 واسهل المعادلات حلا المعادلة ذات الدرجة الاولى والمجهول الواحد
 • (في بيان المعادلة ذات الدرجة الاولى) •
 • (والمجهول الواحد) •
 (٣٢) ولتذكر بعض قواعد متعارفة فنقول
 تعادل المعادلة لا يتغير

اولا اذا ضم لكل من طرفيها كمية واحدة او طرح من كل منهما
 وثانيا اذا ضرب كل من طرفيها في كمية واحدة او قسم كل منهما عليها
 وثالثا اذا جعلت معادلتان الى بعضهما بان يجمع الطرف الاول للاول
 والثاني للثاني او طرحتا من بعضهما او ضربتا في بعضهما او قسمتا على بعضهما
 بحيث تقرر ذلك يجب أن نستغل بالتحويلين المهمين فنقول
 الاول كل معادلة كالمعادلة $x - 2 = 4 + 2x$ يلزم حلها أن
 يكون المجهول في الطرف الايمن سلبا ونحصل ذلك بطرح من كلا طرفيها
 $2x$ فنصير $x - 2 = 4$ ثم نضم الى كل من طرفيها
 2 فنصير $x = 6$ في الطرف الثاني موجبا صار في الطرف الاول سالبا و 4 الذي كان
 في الطرف الاول سالبا صار في الطرف الثاني موجبا فاذن يلزم تحويل احد
 من طرف الى طرف تغيير علامته فقط

والثاني كل معادلة كالمعادلة $\frac{x}{3} = 7 + \frac{4}{5}$ يلزم حلها ان
 نحذف المقامات ولذا تحول اول الكسور والعدد الصحيح 7 الى ذات
 مقام واحد كما عرف من القواعد المعلومة فنصير $\frac{x}{3} = \frac{35}{5} + \frac{4}{5}$
 $= \frac{39}{5}$ ثم يضرب كل من طرفي هذه المعادلة في 30 لنحذف
 المقام فنصير

$$20x - 24 = 312 + 10$$

وقد يتوصل لهذا الناتج من اول الامر بدون كتابة المقام المشتركة أي أنه
 لحذف مقامات معادلة يضرب بسط كل كسر في حاصل ضرب مقامات
 الكسور الاخر ثم يضرب الصحيح في حاصل ضرب المقامات

(نبيه)

هذه القاعدة تختصر في الحالة التي يكون فيها مقامات المعلومة مضروب
 مشتركة

فالمعادلة $\frac{x}{4} = \frac{3}{2} + \frac{2}{4}$ المحتوية على مقامات ذات مضارب

• (11) •

$$\begin{aligned} \frac{7X07}{10} - \frac{1}{1} &= \frac{1}{1} - \frac{10}{10} \text{ أى } \\ \frac{123}{10} - \frac{1}{1} &= \frac{1}{1} - \frac{10}{10} \text{ أى } \\ 266 - 1 &= 1 - 266 \\ 266 &= 266 \end{aligned}$$

وحيث غير المجهول x في المعادلة المقروضة بالمقدار ٣٠ فصار
متطابقة يكون العدد ٣٠ هو حل هذه المعادلة وحل المعادلة

$$\frac{x}{2} - \frac{(x-2)}{2} = 1 - \frac{(x-2)}{2}$$

الذين فيها وتذف المقامات بملاحظة أن ٢ هو المضروب المشترك
الاصغر لجميع المقامات فيحدث

$$\frac{x}{2} - \frac{(x-2)}{2} = 1 - \frac{(x-2)}{2}$$

أو يحدث بعد ترك حدى $\frac{x}{2}$ و $\frac{(x-2)}{2}$ المتاحيان
وتحويل الجاهيل الى الطرف الاول والمحاليم الى الثانى

$$\frac{x}{2} - \frac{(x-2)}{2} = 1 - \frac{(x-2)}{2}$$

ثم يوضع x مضروباً مشتركاً في الطرف الاول ويختصر الحد المتشابهة

وهي $\frac{x}{2} + \frac{(x-2)}{2} = 1 - \frac{(x-2)}{2}$ الموجودة في الطرف الثانى فيحدث

$$\frac{x}{2} + \frac{(x-2)}{2} = 1 - \frac{(x-2)}{2}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{(x-2)}{2} = 1 - \frac{(x-2)}{2}$$

ويمكن اختصار مقدار x بوضع $\frac{x}{2}$ مضروباً مشتركاً في البسط و
مضروباً مشتركاً في المقام فيصير

• (11) •

• (٤٢) •

$$\frac{z^2}{\dots} = \frac{(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}) \frac{3}{4}}{(\frac{3}{4} - \frac{3}{4})} = \dots$$

ولتحقيق هذا المقدار يغير المجهول z^2 في المعادلة المقروضة بمقداره وهو

z^2 وبهذا التغيير يعلم هل المعادلة متطابقة أم لا

• (قاعدة عمومية) •

لحل معادلة ذات درجة أولى ومجهول واحد يلزم

أولاً إجراء عملية الضرب الكائن فيها أن وجدت ثم حذف المقامات

وثانياً تحويل الحدود المشتملة على الجاهيل إلى الطرف الأول والحدود

المعلومة إلى الطرف الثاني

وثالثاً اختصار الحدود المجهولة لتسير حداً واحداً إن كانت المعادلة رقية

وجعل المجهول مضروباً مشتركاً إن كانت المعادلة حرجية

ورابعاً تقسيم طرفها الثاني على المكرر الرقي أو الحرفي للمجهول لخارج

القسمة يكون مقدار المجهول المذكور

(٣٤) يمكن تغيير علامات معادلة بدون أن يتغير التساوى الواقع بين

طرفيها لأنه لو فرضت معادلة $z^2 = z^2 + z^2 - z^2 = z^2$ وحولت

جميع حدود الطرف الأول إلى الثاني وحدود الثاني إلى الأول لصارت

$z^2 = z^2 - z^2 + z^2 = z^2$ وبالعكس الطرفين يحدث

$z^2 = z^2 + z^2 - z^2 = z^2$ وهي لا تتأثر بالمعادلة الأولى

الابتغى علامات جميع حدودها

• (في المعادلات ذات الدرجة الأولى ويجعل الجاهيل) •

(٣٥) كل معادلة ذات مجهولين لها حلول غير منتهية العدد لأنه إذا فرض

لأحد المجهولين مقداراً اختيارياً حدث للمجهول الآخر مقدار مطابق له

فإذا فرضت معادلة $z^2 = z^2 + z^2 - z^2 = z^2$ وجعل فيها $z^2 =$

حدث $z^2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ فاذن يكون مقدار $z^2 = \frac{1}{4}$ ومقدار

٢. $x = 1$ حل للمعادلة وكلما فرض المجهول x مقداره ما وجد للمجهول x مقدار جديد فيكون للمعادلة المفروضة حلول غير منتهية العدد

(٣٦) ولتشتغل الآن بجعل معادلتين ذاتي مجهولين بطرق أربع فتقول الطريقة الاولى طريقة الوضع وهي حذف المجهول بوضع مقداره المستخرج من المعادلة الاولى في الثانية فاذا فرضت معادلتان

$$x + y = 10 \quad (1)$$

$$x - y = 2 \quad (2)$$

واريد حذف احد المجهولين منهما يستخرج من احدهما مقداره بفرض الآخر معلوما فاذا استخرج مقدار x من الاولى بفرض x معلوما حدث $\frac{10-x}{2} = y$ وبوضع هذا المقدار في المعادلة الثانية تصير محتوية على مجهول واحد هكذا

$$x - \frac{10-x}{2} = 2$$

فالقاعدة العمومية لحذف مجهول من معادلتين بطريقة الوضع أن يستخرج من احدهما مقدار احد المجهولين بفرض الآخر معلوما ثم يغير هذا المجهول بمقداره في المعادلة الثانية

الطريقة الثانية طريقة التساوي او المقارنة وهي حذف احد المجهولين من المعادلتين باستخراج مقداره من كل متما وتساوية هذين المقدارين ببعضهما فاذا اريد حذف احد المجهولين x من المعادلتين المذكورتين يستخرج مقداره من كل منهما بفرض المجهول الآخر معلوما فيحدث من احدهما $x = \frac{10-y}{2}$ ومن الاخرى $x = \frac{2+y}{2}$

ويتساوى هذين المقدارين فيحدث معادلة ذات مجهول واحد هكذا

$$\frac{10-y}{2} = \frac{2+y}{2}$$

فالقاعدة العمومية لحذف مجهول من معادلتين ذاتي مجهولين بواسطة طريقة التساوي أن يستخرج من كل منهما مقدار أحد المجهولين بفرض الآخر معلوما ثم يسوى هذان المقداران ببعضهما

الطريقة الثالثة طريقة الحذف بواسطة الجمع أو الطرح
فإذا فرض أن المطلوب حذف المجهول من المعادلتين

$$5x - 2y = 9 \quad \text{و} \quad 2x + 3y = 12$$

$$5x - 2y = 9 \quad \text{و} \quad 2x + 3y = 12$$

وجب التنبيه على أن من له مكرر متحد في المعادلتين المذكورتين
ذو علامتين متخالفتين فلنذفه يكتفى بجمع هاتين المعادلتين إلى بعضهما طرفاً إلى
طرف وبهذا تحدث معادلة محتوية على مجهول واحد هكذا

$$5x - 2y = 9 \quad \text{و} \quad 2x + 3y = 12$$

وإذا فرض أن المطلوب حذف المجهول من المعادلتين

$$3x + 4y = 10 \quad \text{و} \quad 5x - 7y = 2$$

وجب أولاً أن يجعل مكرر من فيهما واحد بضرب طرفي المعادلة الأولى
في مكرر من من المعادلة الثانية وهو ٧ ثم ضرب طرفي المعادلة
الثانية في مكرر من من الأولى وهو ٤ فيحدث

$$21x + 28y = 70 \quad \text{و} \quad 20x - 28y = 12$$

$$21x + 28y = 70 \quad \text{و} \quad 20x - 28y = 12$$

فإذا جمعت هاتان المعادلتان إلى بعضهما حدثت معادلة ذات مجهول واحد

$$41x = 82 \quad \text{و} \quad 21x + 28y = 70$$

هكذا وإذا اقتضت علامة المجهول من في كل من المعادلتين أجرى طرح

المعادلتين من بعضهما طرفاً من طرف عوض بهما

فالقاعدة العمومية لحذف مجهول من معادلتين ذاتي مجهولين بطريقة

الجمع أو الطرح أن يجعل مكرراً للمجهول المراد حذفه من كل من المعادلتين

واحد أو طريق الوصول إلى ذلك أن يضرب طرفاً المعادلة الأولى في مكرر

هذا المجهول من الثانية ثم يضرب طرفاً الثانية في مكرر المجهول المذكور

من الأولى ثم يجمع المعادلتان على بعضهما أو تطرح إحداها من الأخرى

بحسب اختلاف واتحاد علامته في كل من المعادلتين المفروضتين

• (٤٥) •

• (نظية) •

الفرض من ضرب طرف كل من المعادلتين في مكرر الجاهول المراد حذفه
تسير المعادلتين محتويتين على هذا الجاهول بكرر واحد ويمكن الوصول
الى ذلك بطريقة مختصرة عندما يكون تكررى هذا الجاهول مضروب مشترك
فاذا فرض أن المراد حذف m من المعادلتين

$$m + 6m = 28 \quad \text{و}$$

$$m + 8m = 28$$

فالمكرران ٦ و ٨ حيث أن لهما مضروباً مشتركاً يثبت من القسوم
الاصغر لهما فيوجد ٢٤ وحيث يسهل تحويل المعادلتين لتصبحا
محتويتين على الجاهول m بكرر ٢٤ بضرب طرفى المعادلة الاولى
في ٤ الذى هو خارج قسمة ٢٤ على ٦ ثم ضرب طرفى المعادلة
الثانية في ٣ الذى هو خارج قسمة ٢٤ على ٨ فيحدث

$$20m + 24m = 112 \quad \text{و}$$

$$21m + 24m = 112$$

وهذه الكيفية المختصرة هي المشاهدة في علم الحساب في كيفية تحويل الكسور
الى كسور اخصر مقاماً مشتركاً

فالقاعدة التى يراد سلوكها هنا عين القدر هناك
الطريقة الرابعة طريقة المكررات غير المعينة

فاذا فرضت معادلتان $m + 6m = 28$ و $m + 8m = 28$
 $= 28$ تضرب حدود المعادلة الاولى في m ثم تجمع الثانية اليها طرفاً الى
طرف فيحدث

$$m + 6m + m + 8m = 28 + 28m$$

ثم يوضع m و m مضروبين مشتركين في الحدود المشتقة عليهما
فيحصل

$$28 + 28m = (6 + 8)m$$

• (٤٦) •

وانما لم تعين كمية م لاجل حذف احد المجهولين فاذا اريد حذف م
مثلا يسوى مكرره بصفر هكذا

$2م + 8 = 0$ ومنه يستخرج م $= -\frac{8}{2} = -4$ ثم
تستعوض بـ ٤ م و $2م + 8$ في معادلة $(٧ + م٥)$ م
 $+ (٨ + م٦) = ٣٨$ م $= ٣٨ - ٨$ بالمقدارين $-\frac{8}{2}$ ومفر
وبهذا تؤل الى $(٧ - \frac{8}{2} + \frac{8}{2})$ م $= ٣٨ + \frac{1٢}{2}$
فاذن يكون المجهول م قد اُحذف

فالقاعدة العمومية لحذف مجهول من معادلتين بطريقة المكررات غير
المعينة ان تضرب احدى المعادلتين في كمية ما غير معينة ثم يجمع الناتج الى
المعادلة الاخرى طرقا الى طرف ثم يوضع كل مجهول مضروباً مشتركاً
في الحدود والمنسقة عليه ثم يسوى مكرراً المجهول المراد حذفه بصفر
فيصير محدوقاً ثم تستعوض الكمية غير المعينة بمقدارها المستخرج من القرض
المتقدم

• (تنبيه) •

اسهل الطرق الاربعة في العمل طريقة الجمع أو الطرح لانها لا تحدث مقاما
في المعادلة الناقصة من الحذف غير أن طريقة الوضع تستعمل بكثرة عند
ما يكون مكرراً المجهول المراد حذفه مساوياً للواحد في احدى المعادلتين
ذاتي المجهولين

(٣٧) حل معادلتين ذاتي مجهولين ودرجة اولى كعادتي
 $٧م - ٨ = ٥$ و $٥م - ١٢ = ٣$ يحذف المجهول
م بضرب المعادلة الاولى في ٣ والثانية في ٢ ثم تطرح الثانية
من الاولى فيصير

$١١م = ٣٣$ ومنها يستخرج م $= \frac{٣٣}{١١} = ٣$
ولا استخراج مقدار المجهول م يوضع مقدار المجهول م بدله
في احدى المعادلتين فيوضع في الاولى مثلاً مقدار م بدله فتصير

• (٤٧) •

$$21 - 8 = 13 \text{ ومنها يحدث } 0 = \frac{21-8}{13} = 1$$

فالقاعدة العمومية على معادلتين ذاتي مجهولين ودرجة أولى أن يحدف
احد المجهولين منهما فتنتج معادلة ذات مجهول واحد يستخرج منها مقدار
هذا المجهول ثم يوضع مقداره بدله في إحدى المعادلتين فتؤول الى معادلة
محتوية على المجهول الثاني ثم يستخرج منها مقدار

(٢٨) وبمقتضى ما ذكر يسهل حل ثلاث معادلات كل منها ذات ثلاثة
مجهول فإذا فرض مثلا

$$0 = 8 - 2 + 19 = 25 \text{ و}$$

$$2 = 2 + 1 - 9 = -6 \text{ و}$$

$$7 = 2 - 2 = 0$$

يحدف ع من المعادلة الاولى والثانية بضرب الاولى في ٢ ثم ضم الناتج
الى الثانية فيحدث

$$12 = 13 - 2 = 11 \text{ (١)}$$

ثم يحدف ع من المعادلة الثانية والثالثة بضرب الثالثة في ٢ ثم طرح
الثانية من الحاصل فيحدث

$$19 = 9 - 12 = -3 \text{ (٢)}$$

ثم يحدف المجهول ع من المعادلتين (١) و (٢) ذاتي الدرجة الاولى
والمجهولين بأن تضرب الاولى في ٩ والثانية في ١٣ ثم تطرح الاولى
من الثانية فيحدث

$$139 = 117 \text{ ومنها يحدث } 2 = \frac{117}{139}$$

ثم يستخرج مقدار المجهول ع بوضع مقدار ع عوضا عنه في إحدى
المعادلتين (١) و (٢) فيحدث

$$26 - 13 = 13 \text{ ومنها ينتج}$$

$$0 = \frac{26+13}{13} = 3$$

ثم لاستخراج مقدار ع يوضع في إحدى المعادلات الثلاث المشتقة كل منها

التي عدد مجاهيلها م وهو عين فدها فتشكون قد استخربت مقادير الجاهيل على التوالي

(٤٠) قد فرضنا في البحث من قاعدة حل معادلتين ذاتي مجهولين ان كليهما بهذه الصورة $٥ م + ٤ ص = ١٠$ اعني أن كليهما لا تحتوي الاعلى ثلاثة حدود صحيحة احدها مستقل على م والثاني على ص والثالث على المعلوم وأن الحد المعلوم في الطرف الثاني والحدين الاخرين في الطرف الاول فاذا كانت صورة المعادلتين متشعبة وبسبب حيث قد تحويلها الى الصورة البسيطة المتقدمة فيجب

اولا اجراء عمليات الضرب الموجودة بها وحذف المقامات وثانيا تحويل الحدود المستقلة على المجهولين الى الطرف الاول والحدود المألومة الى الطرف الثاني

وثالثا اختصار حدود م وحدود ص أو وضع م و ص مضروبين مشتركين في الحدود المستقلة عليهما ومثل ذلك يجري على جملة المعادلات ذات الجاهيل الثلاثة أو الاربعة أو الخمسة وهلم جرا

(٤١) قد فرضنا في المعادلات التي حلت أن جميع الجاهيل داخل في كل منها فان لم يكن جميعها داخل في كل منها سميت معادلات غير تامة وحلها كل المعادلات التامة غيراته يجب الاتيان في ان تصاب الجاهيل التي يراد حذفها ليتوصل الى معادلة ذات مجهول واحد في اقرب وقت وللعصول على ذلك يحذف المجهول الداخل في المعادلات بأقل عدد من المعادلات

$$٢ م + ٣ ص - ٤ ع = ١٠$$

$$٥ م - ٤ ع = ١٢$$

$$٢ م + ٣ ص = ١٩$$

$$٣ م - ٤ ص - ٢ ع = ٩$$

مثلا يشاهد أن المجهول ر دخل في عدد اقل من غيره فيجب حذف هذا المجهول من هذه المعادلات بأن يحذف من المعادلتين الاخيرتين

المحتويين عليه تحدث معادلة مجردة منه فإذا ضمت هذه المعادلة إلى المعادلتين الأولىين يحدث ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل هي

$$٢ + ٣ = ٤ \quad ٣ = ٤ \quad ١ = ٢$$

$$٥ = ٣ = ٤ \quad ١٢ =$$

$$٩ = ١٢ = ٤ = ١١$$

وحيث أن المجهول ٣ داخل في هذه المعادلات بعدد أقل من غيره يحذف من المعادلة الأولى والثالثة ليكن من حذفه معادلة مستقلة على مجهولين هما المجهولان الموجودان في الثانية وبكتابتها مع الثانية يحدث

$$٥ = ٣ = ٤ \quad ١٢ =$$

$$٥٩ = ٣ = ٥٠ = ٤ \quad ١٢٧ =$$

فإذا حذف ٤ منها يحدث $٧٣ = ٥١٩$

ومنها يحدث $٣ = ٤$

وبالوضع يحدث على التوالي $٣ = ٤$ و $١ = ٢$ و $٥ = ١٢$

(٤٢) قد يكون عدد المعادلات في حل جملة معادلات ذات درجة أولى وجملة مجاهيل قدر عدد المجاهيل كما تقدم في جميع حل المعادلات التي حلت وقد يكون عدد المعادلات أزيد من عدد المجاهيل

وقد يكون عدد المجاهيل أزيد من عدد المعادلات فهذه ثلاث حالات الحالة الأولى إذا كان عدد المعادلات ذات الدرجة الأولى قدر عدد المجاهيل الداخلة فيها بان كان الأول $م$ والثاني $م$ وكانت ممكنة الحل على العموم ومنتهية أعني أنها تحقق بجملة واحدة من مقادير المجاهيل المنصورة فيها

لأنه إذا سلكت الطريقة الميينة في (٣٩) لحل جملة معادلات توصل إلى معادلة ذات مجهول واحد هكذا

$٧ = ٤$ ومنها يستخرج $٣ = ٤$ فإذا وضع هذا المقدار في إحدى المعادلتين ذاتي المجهولين حدث مقدار للمجهول الثاني المنصرفة في هذه

المعادلة ومثل ذلك يجري في جميع الجاهيل الجمل الحادثة من الاوضاع المتوالية

وقد يتوصل بعد عملية الحذف على التوالي الى معادلة انتهائية ~~هكذا~~ $x = 0$ أو $x = 0$ وهي معادلة قاسدة تدل على أن الجملة المفروضة غير ممكنة الحل أعني أنه لا يمكن تحقيقها ببساطة المقادير الجاهيل المتحصرة فيها وذلك انما يقع عندما تكون هذه الجملة محتوية على معادلات متضادة .

وقد يتوصل بعد الحذف على التوالي الى معادلة انتهائية ~~هكذا~~ $x = 0$ أو $x = 0$ فتكون جملة المعادلات غير معينة الحل أعني أنه يمكن تحقيقها بجمل لانهاية العدد من المقادير الجاهيل المتحصرة فيها وانما يقع ذلك اذا كان بين بعض معادلات من الجملة تداخل به يكون عدد المعادلات اقل من عدد الجاهيل

الحالة الثانية اذا كان عدد المعادلات أكثر من عدد الجاهيل المتحصرة فيها بان كان عدد الاولى $m + 1$ وعدد الثانية m فالجملة تكون على العموم غير ممكنة الحل لانه اذا أخذ منها معادلات عددها m وصكان لا يوجد الا جملة واحدة من مقادير الجاهيل المتحصرة فيها التي عددها m ووضعت هذه المقادير في المعادلات الباقية التي عددها 1 ولم تطابق تكون الجملة المفروضة غير ممكنة التحقق

وقد يوجد تداخل بين بعض معادلات الجملة المفروضة مع ~~هكذا~~ كون عدد المعادلات المحققة وهو m عين عدد الجاهيل المتحصرة فيها فحينئذ تكون الجملة المذكورة ممكنة الحل ومعينة فان كان عدد المعادلات المحققة اقل من m أي من عدد المعادلات المفروضة فالجملة المذكورة تكون غير معينة الحل الحالة الثالثة اذا كانت المعادلات اقل من الجاهيل المتحصرة فيها بان كان عدد الاولى m وعدد الثانية $m + 1$ كانت الجملة على العموم غير معينة الحل لانه يتوصل بعد الحذف تتولى ان معادلة مستقلة على

بجهايل عددها ٥ ١ ٢ ٣ وهذه المعادلة تحقق بجمل لانهاية العدد
من المقادير فاذا وضع أحدها في الجمل في إحدى المعادلتين المشتقتين على
بجهايل عددها ٥ ١ ٢ ٣ يحدث مقدار مطابق للجهول الباقي في هذه
المعادلة فان يكون لهذا الجهول مقادير غير معينة ايضا ومثل ذلك يشاهد
في جميع الجهايل الاخرى اى انه يكون لها مقادير عددها لانها في ومع ذلك
فالبطل تكون غير ممكنة الحل اذا وجد في المعادلات التي عددها م وعدد
بجهايلها م ٥ معادلتان أو ثلاث متخالفة

امثلة ذلك

المثال الاول أن تفرض ثلاث معادلات هكذا

$$٢ م - ٢ م + ٥ ع = ١٤ \quad \text{و}$$

$$٢ م + ٢ م - ٨ ع = ١٠ \quad \text{و}$$

$$٦ م - ٤ م + ١٠ ع = ٢٧$$

ثم يحذف للجهول م من المعادلة الاولى والثانية ثم من الاولى والثالثة
فيوجد ٧ م - ١١ ع = ٢٤ و ١ = ٠ فالمعادلة الفاسدة التي
هي ١ = ٠ تبين ان المعادلة الاولى والثالثة الحادثة منهما هذه المعادلة
متخالفتان ويذهب ذلك من أول وهلة لان الطرف الاول من المعادلة الثالثة
ضعف الطرف الاول من المعادلة الاولى الذي هو ٢ م - ٢ م + ٥ ع
والطرف الثاني منها ليس ضعف الطرف الثاني من الاولى الذي هو ١٤
وهذا ناتج من فساد المعادلات الاصلية

المثال الثاني أن تفرض ثلاث معادلات هكذا

$$٢ م - ٢ م + ٥ ع = ١٤ \quad \text{و}$$

$$٢ م + ٢ م - ٨ ع = ١٠ \quad \text{و}$$

$$٦ م - ٤ م + ١٠ ع = ٢٨$$

ثم يحذف م من المعادلة الاولى والثانية ثم من الاولى والثالثة
فيحدث

٧ من جـ ١٢ زج = ١٢ و ٠ = ٠
 فيظهر من المطابقة = أن المعادلة الأولى والثالثة متداخلتان
 لأن المعادلة الثالثة تحدث من ضرب طرفي المعادلة الأولى في ٢ فبالجـ
 المعلومة لاثنتين المعادلتين

$$\begin{aligned} ٢ - ٢ = ٢ + ٠ + ٠ = ١٤ \quad \text{و} \\ ٢ - ١١ = ١١ \end{aligned}$$

فيستخرج من المعادلة الأخيرة = $\frac{١١ + ٢٤}{٧}$ ويوضع هذا المقدار
 في المعادلة الأولى يحدث

$$٢ = \frac{٢٤ + ٢}{٧} \quad \text{أو} \quad ٢ = \frac{٢٤ + ٢}{٧}$$

وهذان المقداران يطابقان أي مقدار فرض للجهول ع ومقادير
 و و و و ع المطابقة تحقق المعادلات المعلومة وإذا كان
 حل المعادلات غير معين
 المثال الثالث إذا فرض

$$\begin{aligned} ٢ - ٢ = ٢ + ٠ + ٠ = ١٤ \quad \text{و} \\ ٢ - ١ = ١ + ٠ + ٠ = ٢٨ \quad \text{و} \\ ٩ - ١ = ١ + ١٠ + ٠ = ٤٢ \end{aligned}$$

ثم حذف المجهول ع من المعادلة الأولى والثانية ثم من الأولى والثالثة
 حدث متطابقتان وهذا يدل على أن الجملة المعلومة تؤل إلى معادلة واحدة
 هي ٢ - ٢ = ٢ + ٠ + ٠ = ١٤ لأن المعادلة الثانية ناتجة
 من ضرب المعادلة الأولى في ٢ والثالثة من ضربها في ٣ فإذا استخرج
 مقدار من المعادلة ٢ - ٢ = ٢ + ٠ + ٠ = ١٤ يحدث
 من $\frac{١٤ + ٢}{٧}$ وإذا فرضت مقادير للجهول و ع
 حدث مقدار للجهول و جميع هذه المقادير تحقق المعادلات
 الأصلية

المثال الرابع إذا فرض

$$٢ \text{ صم} - ٢ \text{ صم} + ٥ \text{ ع} = ١٤ \text{ و}$$

$$٢ \text{ صم} + \text{صم} - ٨ \text{ ع} = ١٠ \text{ و}$$

$$٨ \text{ صم} - ٢ \text{ صم} + ٢ \text{ ع} = ٢٥$$

ثم حذف صم من الأولى والثانية ثم من الثانية والثالثة فحدث هاتان

$$\text{المعادلتان } ٧ \text{ صم} - ١١ \text{ ع} = ٢٤ \text{ و } ١٤ \text{ صم} - ٢٢ \text{ ع} = ٦٥$$

وهاتان المعادلتان مختلفتان فلو تبدل اختلافهما في بعضهما لحدث معادلة قاسدة

هي $٠ = ٢$ وفهم من ذلك ان المعادلات الاصلية متخالفة ايضا لان الطرفين

الاول من المعادلة الثالثة ضعف الطرف الاول من الاولى مضموما اليه

الطرف الاول من المعادلة الثانية لكن الطرف الثاني من المعادلة الثالثة ليس

مساويا لضعف الطرف الثاني من المعادلة الاولى مضافا الى الطرف الثاني من

المعادلة الثانية

المثال الخامس اذا فرضنا

$$٢ \text{ صم} - ٢ \text{ صم} + ٥ \text{ ع} = ١٤ \text{ و}$$

$$٢ \text{ صم} + \text{صم} - ٨ \text{ ع} = ١٠ \text{ و}$$

$$٨ \text{ صم} - ٢ \text{ صم} + ٢ \text{ ع} = ٢٨$$

يحدث بحذف صم منها معادلتان

$$٧ \text{ صم} - ١١ \text{ ع} = ٢٤ \text{ و } ٧ \text{ صم} - ١١ \text{ ع} = ٢٤$$

وحيث ان قمتين المعادلتين متطابقتين يفهم من ذلك انه يجب استعمال

المعادلتين $٢ \text{ صم} - ٢ \text{ صم} + ٥ \text{ ع} = ١٤$ و $٧ \text{ صم} - ١١ \text{ ع} = ٢٤$

$= ٢٤$ المشروحتين سابقا في المثال الثاني

وعدم انتهاء الجملة المعلومة حادث من كون المعادلة الثالثة مركبة من ضم

ضعف طرفي المعادلة الاولى الى طرفي المعادلة الثانية

المثال السادس اذا فرضنا

$$٢ \text{ صم} - ٢ \text{ صم} + ٥ \text{ ع} = ١٤ \text{ و}$$

$$٦ \text{ صم} - ٤ \text{ صم} - ٢ \text{ ع} = ١٥ \text{ و}$$

$$٩ \text{ صم} - ٦ \text{ صم} - ٧ \text{ ع} = ٢٠$$

حدث بحذف x منهما معادلتان $12 = x$ و $13 = x$ و $12 = x$ و $13 = x$ ومنها يحدث $x = 1$ ولا يجري العمل الاعلى هذه المعادلة وأحدى المعادلات المقروضة الا يتبين الى المعادلتين $x = 1$ و $13 = x$ و $12 = x$ و $13 = x$ فاذن يكون الحل غير معين نظرا الى الجاهيل x و $13 = x$ و $12 = x$ الذي ليس له المقدار واحد محدود

• (مسائل من الدرجة الاولى) •

(٤٣) حل المسئلة الجبرية بتركيب من برتين متغيرين احدهما وضع المسئلة بصورة معادلة تدل بطريق الاختصار على الارتباطات الكائنة بين الكميات المعلومة والجهولة كدلالة منطق المسئلة والثاني حل المعادلة أو المعادلات الناتجة من الوضع المذكور

والجزء الثاني من هذين الجزئين مؤسس على قواعد مطردة تقدم ذكرها في الحالة التي تكون فيها المعادلات ذات درجة اولى واما وضع المسئلة بصورة معادلة فغير مؤسس على قواعد مطردة الا ان اذ ~~تذكر~~ قاعدة عامة بها يتوصل الى وضعها بصورة معادلة وان كان تطبيق تلك القاعدة يعسر في بعض الاحيان فاقول

• (قاعدة عامة) •

يجب لو وضع مسئلة بصورة معادلة بعد الرمز لجاهيلها x و $13 = x$ ان تبين بواحدة العلامات الجبرية العمليات التي يلزم اجراؤها على الكميات الجهرولة باعتبارها معلومة لتحقيق شروط منطق المسئلة وتطبق هذه القاعدة على حل مسائل فنقول

• (المسئلة الاولى) •

(٤٤) رجل اوصى قبل موته بان تصف تركته لوارثيها وهم النته وبقاياها وهو ١٤٠٠٠ غرش لفقراء والمراد معرفة مقدار تركته غروشا وما يخص كل وارث منها

بغل ذلك أن يفرض x ومن التركة ومقتضى منطق المسئلة أن تكون التركة مساوية لما يخص الوالد إذا ما يخص البنت زائدا ١٢٠٠٠ غرش أى

$$x = 12000 + \frac{x}{2}$$

ثم تجرى قاعدة الحل المعلومة على هذه المعادلة فيحدث

$$2x = 24000 + x \quad \text{أى}$$

$$2x - x = 24000 + x - x \quad \text{أى}$$

$$x = 24000 \quad \text{أى}$$

$$x = 24000$$

فقدار تركته ٢٤٠٠٠ غرش يخص الوالد منها النصف وهو ١٢٠٠٠

غرش والبنت الثلث وهو ٨٠٠٠ غرش والفقراء الباقي وهو ٤٠٠٠ غرش

• (المسئلة الثانية) •

(٤٥) ما هو العدد اللازم ضربه لعدد الكسر $\frac{3}{4}$ ليكون الناتج مساويا لكمية معلومة m

حل ذلك ان يفرض أن x العدد المطلوب فيكون بالضرورة

$$\frac{3}{4}x = m$$

$$x = \frac{4}{3}m$$

$$x = \frac{4}{3}m$$

$$x = \frac{4}{3}m$$

$$x = \frac{4}{3}m$$

• (مناقشة) •

مناقشة المسئلة هو البحث عن الاحوال التى يؤل اليها الحل بواسطة القروض المختلفة الجارية على المعاليم

س = $\frac{1}{2}$ و إذا فرض في هذا المقدار أن م = $\frac{1}{4}$ و س = ٨
و س = ٥ يحدث س = ٢

وثالثا إذا فرض أن $\frac{2}{3} = \frac{9}{4}$ و م = ١ بأن جعل م = ١
و س = ٥ و س = ٩ في مقدار س آلى
س = $\frac{9}{4} = ٢ \frac{1}{4}$

ولإيضاح هذا الناتج يقال من المعلوم أن الكسر يزاد متى نقص مقامه فإذا
صغر المقام إلى غير نهاية أو تساوى صفرا كبر الكسر كذلك فإذا كان يكون
فجهول س مقدار غير منته في الكبر أعنى مقدار لا يحد أبدا فالمسئلة
تكون أيضا غير ممكنة الحل لأنه إذا تأمل في منطوق المسئلة شوهد أن الكسر
إذا ضم لحدية عدد بالغاما بلغ يزاد به غير أنه لا يصير أبدا مساويا للواحد لأن
فروق حدية واحدة دائما فحينئذ يكون أى مقدار بهذه الصورة $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{9}{4}$
دالا على استحالة حل المسئلة

• (نبية) •

كل عدد غير محدود يمكن يانه بالكسر $\frac{2}{3}$ أو $\frac{1}{4}$ أو بعلامة ∞
ورابعا إذا فرض $\frac{2}{3} = \frac{9}{4}$ و م = ١ بأن جعل م = ١
و س = ٥ و س = ٩ في مقدار س آلى ذلك المقدار إلى
س = $\frac{9}{4} = ٢ \frac{1}{4}$ وتوضيح مقدار س = $\frac{9}{4}$ يقال أن مقدار
س يكون مساويا لخارج قسمة صفر على صفر أى مساويا لعدد إذا ضرب
في صفر أنتج صفر وأحيث أن جميع الأعداد المحدودة المضروبة في صفر تحدث
صفر أيكرا أعطى س أى مقدار وفي بهذا تكون المسئلة غير معينة الحل
لأنه إذا تأمل في منطوق المسئلة يشاهد أن تساوى حدى الكسر $\frac{2}{3}$ لا يتغير
بضم أى عدد إليهما فحينئذ يكون الناتج مساويا للواحد دائما وينتج من ذلك
أن أى مة بهذه الصورة $\frac{2}{3}$ يدل على أن المسئلة غير معينة الحل
• (المسئلة الثالثة) •

١

(٤٦) ساعيان ابتداء الساعي من نقطتي A و B على مستقيم AB من الشمال الى العين وكان الساعي المبتدء من B متقدما عن الآخر بالمسافة AB الرموز لها بالحرف E وسرعته U وسرعة الآخر M والمراد تعيين نقطتي وضعيهما حين ~~يكون~~ يتبعهما مسافة من امتداد AB مساوية للبعد E (والمراد بسرعة الساعين الميمنة بالرمزين M و U البعدان اللذان يقطعهما الساعيان في وحدة الزمن)

فيرمز بالحرفين A و B لوضعي الساعين حين يكون البعد الحادث بينهما مساويا للكمية E ثم يرمز بالحرف M للبعد المجهول الذي هو A قال بعد B المساوي $A - A - B + A$ يكون مينا بالمقدار $M - E + E$

وبحيث ان الزمن الذي استغرقه الساعي المبتدء من A في قطع البعد M عين الزمن الذي استغرقه الآخر المبتدء من B في قطع البعد $M - E + E$ يبحث عن كل من هذين الزمنين فيقال حيث ان الساعي الاول قطع البعد M في وحدة الزمن يقطع وحدة البعد في الزمن M ويقطع البعد M في الزمن M ومثل ذلك الساعي الثاني قطعه يقطع البعد $M - E + E$

في زمن معين بالمقدار $M - E + E$ فاذن تحدث هذه المعادلة

$$\frac{M - E + E}{M} = \frac{M - E + E}{M - E + E} \quad \text{ومنها يحدث}$$

$$M - E + E = M - E + E \quad \text{أو}$$

$$M - E + E = M - E + E \quad \text{أو}$$

$$M - E + E = M - E + E \quad \text{ومنها ينتج}$$

$$M - E + E = M - E + E$$

• (١٠) •

فحينئذ يكون s الذي هو عبارة عن البعد 11 مساويا $\frac{m(s-1)}{2-m}$

وإذا رمزنا بالبعد s بالحرف s يكون $s = \frac{m(s-1)}{2-m} + 11$

$$\frac{m(s-1)}{2-m} = \frac{2s-2}{2-m} = \frac{2s-2+2m+2m-2}{2-m} = \frac{2s-2+4m-2}{2-m} = \frac{2s-4+4m}{2-m}$$

• (مناقشة احوال المسئلة) •

الحالة الاولى اذا فرض أن $s = 1$ و $m < 2$ حدث

$$s = \frac{m(s-1)}{2-m} \text{ و } s = \frac{m(s-1)}{2-m}$$

فيكون مقدار s ومقدار m سالبين لان البسطين مالبان والمقام المشترك موجب لان m فيه اكبر من 2

ولتتبركا في المسئلة السابقة هل هذان المقداران يدلان على أن المسئلة ممكنة الحل فنقول

قد فرضنا في هذمان الساعين قد ذهبا من نقطة واحدة بدليل أن $s = 1$ ومن حيث ان سرعتهم مختلفة بدليل ان $m < 2$ يوجد لحظة فيها البعد القصار بينهما مساويا للكمية s فاذن تكون المسئلة ممكنة الحل

فحينئذ لا تكون المقادير السابقة ناشئة من عدم امكانية المسئلة وانما هي ناشئة من فساد فرض اجري في وضع المسئلة على صورة معادلة لانه قد فرض ان الساعي الذاهب من A باق خلف الاخر مع أن الموضوع في هذه الحالة انهما ذهبا من نقطة واحدة وان سيرا الساعي A أسرع من سير

الاخر s فاذن لا يكون خلفه أبدا فلا يصحكون وضعها A و s المفروضين عند وضع المسئلة على صورة معادلة الموضوعين الحقيقيين

فيجب حل هذه المسئلة ووضعها على صورة معادلة أن يجعل للساعين الحقلين

الحقيقيين المشغولين بهما أي أن يفرض أن A على يمين نقطة s فيكون

البعد A مينا بالحرف s والبعد s مساويا $s = 1$

قصير المعادلة هكذا

$$1 - \frac{1}{m} = \frac{m-1}{m}$$

$$m = \frac{m-1}{m-2} \text{ ومنها يستخرج .}$$

$$m = \frac{m(m-1)}{m-2} \text{ وبناء على ذلك يكون}$$

$$m = \frac{m(m-1)}{m-2}$$

فإذا فرض في هذين المقدارين أن $m = 0$ و $m < 2$ وهو من
الفرض الذي حدث منه المقداران السالبان المتقدمان

$$\text{ألا إلى } m = \frac{m}{m-2} \text{ و } m = \frac{m}{m-2}$$

وهما مقداران موجبان متحذان في المقدار المجرد مع المقدارين السالبين
المستخرجين مما تقدم فينتد يكون المقدار السالب ناقصاً بعض الأحيان من
فرض فاسد أجرى في وضع المسئلة على صورة معادلة

الحالة الثانية إذا فرض أن $m = 0$ و $m < 2$ آل المقداران
العموميان إلى

$$m = \frac{m}{m-2} \text{ و } m = \frac{m}{m-2}$$

ومن حيث أن $m < 2$ يكون هذان المقداران موجبين لأن بسطيهما
موجبان ومقاميهما كذلك

فإذا توصل في منطوق المسئلة شوهد أنها يمكنه الحل لأنه بفرض m صفراً
يظهر أن المطلوب تعيين النقطة التي يلحق فيها الساعي أ الساعي ب وأن
لحوقه به يكون محققاً حيث فرضت سرعته أكبر من سرعة الساعي ب
فينتد يكون المقداران الموجبان المتقدمان دالين على إمكانية المسئلة

الحالة الثالثة إذا فرض أن $m = 0$ و $m > 2$ آل المقداران
العموميان إلى

$$س = م + م' \quad و \quad م = م' - م''$$

وهما مقداران سالبان لان البسطين موجبان والمقامين سالبان (حيث كان $م > م'$) وايسا ناقصين من فساد للغرض في وضع المسئلة على صورة معادلة لان الحالة الخصوصية التي نحن بصدد حلها لا تحتوى على فرض متكون فيه حيث كان المطلوب تعيين النقطة التي يلق فيها الساعي - الساعي $أ$ وانما يكون الحلان السالبان ناقصين من اختلاف أحد شروط منطوق المسئلة لان سرعة الساعي $أ$ مفروضة اقل من سرعة الساعي - بدليل أن $م > م'$ فاذن لا يمكن أن يلق الساعي $أ$ الساعي - وتصلح منطوق المسئلة يفرض في المعادلة $س = م + م'$ أن $م = م'$. ثم تغير علامة $س$ وبه نؤول الى $س = م' - م''$ وبغير علامة الطرفين يحدث $س = م' - م''$ وتحويل هذه المعادلة الى منطوق مسئلة يلاحظ أن $س$ هو الزمن الذي استغرقه الساعي $أ$ ليقطع البعد $س$ وأن $م'$ هو الزمن الذي استغرقه الساعي - ليقطع البعد $س$ + $م'$ وحيث أن المسافة التي قطعها الساعي $أ$ ليصل لنقطة التلاق مع الساعي - أصغر من المسافة التي قطعها الساعي - تكون نقطة التقابل على شمال النقطة $أ$ فمعادلة $س = م' - م''$ تحول الى منطوق لائق هو

$$س = م' - م''$$

ساعيان ابتدأ في السير على خط $أ - ب$ من نقطتين $أ$ و $ب$ وسيرهما من اليمين الى الشمال لكن الساعي $أ$ سابق للساعي - بالبعد $د$ وسرعة الاول $م$ والاخر $م'$ والمطلوب تعيين النقطة $س$ من امتداد $أ - ب$ التي يلق فيها الساعي - الساعي $أ$

فاذا حلت المعادلة $س = م' - م''$ على اسلوب ما تقدم يوجد البعدين $أ - ب$ و $س$ أي $س$ و $س + د$ أو $س$ المقداران

الموجبان والمقداران في المقدار المجزأ مع المقدارين التاليين المستخرجين مما تقدم .

الحالة الرابعة إذا فرض أن $z = 0$ و $m = 0$ فالمقداران العموميان يؤلان الى

$$s = 0 \text{ و } v = 0$$

وهما مقداران غير محدودين فالمسئلة تكون حينئذ غير ممكنة الحل لان سرعة الساعين واحدة فالبعد القارق بينهما لا يصير مساويا للصفر أبداً

الحالة الخامسة إذا فرض أن $z = 0$ و $v = 0$ و $m = 0$ فالمقداران العموميان يؤلان الى

$$s = 0 \text{ و } v = 0$$

ونحيث أن هذين المقدارين غير معينين يمكن إعطاء المجهولين جميع المقادير الممكنة وهو يوافق منطق المسئلة لان الساعين خرجا من نقطة واحدة بدليل أن $v = 0$ ولا يفترقان بدليل أن $m = 0$ فاذن يكون

$$z = 0 \text{ في جميع نقط الخط } s = 0$$

(انواع ناتجة من مناقشة المسائل التي بدرجة أولى)

(٤٧) قد نتج من مناقشة المسائل المتقدمتين أربعة أنواع من المقادير النوع الاول المقادير الموجبة والثاني المقادير السالبة والثالث المقادير التي بهذه الصورة $\frac{z}{v}$ والرابع المقادير التي بهذه الصورة $\frac{z}{m}$

فأما المقادير الموجبة فانهما تدل على امكان حل المسئلة الا في مسائل احتيج فيها الى أن يكون مقدار المجهول عدداً صحيحاً ووجد مقدار كسراً موجباً فانها غير ممكنة الحل وذلك كالمسئلة التي يراد فيها تعيين اسس جبرية تعداديهما .
وأما المقادير السالبة فانها تحدث من افروضات مسئلة انكاسية في وضع

المسئلة على صورة معادلة أو من التخلل في معنى أحد شروط منطوق المسئلة

ومنى نتج للجهول مقدار سالب وبجيب أو لا اختيار وضع المسئلة على صورة معادلة هل فيه فرض يشك في معناه فإن كان فيه ذلك غير معنى هذا الفرض يتم حل المسئلة الجديدة الناتجة منه فإن لم يكن فيه فرض يشك فيه أو كان واضح لكن وجد مقدار سالب أو جملة مقادير الجاهيل تحقق بالضرورة عدم إمكانية بعض شروط منطوق المسئلة فإذا التصليح هذا المنطوق في المعادلة أو المعادلات التي حلت تغير علامات الجهول أو الجاهيل التي وجدت لها مقادير سالبة ثم تحول المعادلات الجديدة الى عبارة قريية المنطوق ما أمكن من المنطوق الاصل فينتج من ذلك مسئلة جديدة ممكنة الحل غير مخالفة للاولى الا في معنى بعض شروط المنطوق ومقادير الجاهيلها موجبة ومقاديرها المجردة عين المقادير التي استخرجت من المسئلة الاولى

وأما المقادير التي بهذه الصورة $\frac{3}{2}$ فانها تدل على أن المسئلة غير ممكنة الحل وتحدث المقادير المذكورة من عدم موافقة بعض شروط المنطوق أو من اشتراط شرط لا يمكن تحقيقه أو من أن المنطوق يشتمل على شروط أكثر من الجاهيل

وأما المقادير التي بهذه الصورة $\frac{3}{2}$ فبما انها تدل على أن المسئلة غير معينة الحل والمقادير المذكورة تحدث من كون منطوق المسئلة مشتقاً على شرط متحقق دائماً ومحتوي على شروط أقل من الجاهيل

• (فيه) •

الملاحظات المتقدمة تحقق في جميع المسائل المناقشة

• (مناقشة عامة للمعادلات ذات الدرجة الاولى) •

(٤٨) ولتبدء بوضع المعادلات ذات الدرجة الاولى وجملة الجاهيل وحلها فتقول كل معادلة ذات درجة اولى ومجهول واحد يمكن تحويلها الى

هذه الصورة $\frac{3}{2}$ التي يستخرج منها $\frac{3}{2}$

وكل

وكل معادلتين ذاتي درجته الأولى مجهولين يمكن تحويلهما إلى هذه الصورة

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

فالخروف x و y و a_1 و b_1 و c_1 و a_2 و b_2 و c_2 رموز لكميات صحيحة معلومة ذات علامات ما فإذا حلت هاتان المعادلتان بمقتضى ما تقرر يحدث

$$x = \frac{b_2c_1 - c_2b_1}{a_2b_1 - b_2a_1} \quad y = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_2b_1 - b_2a_1}$$

وكل ثلاث معادلات ذات درجته الأولى وثلاثة مجاهيل يمكن تحويلها إلى هذه الصورة

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

فالخروف x و y و z و a_1 و b_1 و c_1 و d_1 و a_2 و b_2 و c_2 و d_2 و a_3 و b_3 و c_3 و d_3 تدل على كميات صحيحة معلومة ذات علامات ما ويحدث من هذه المعادلات الثلاث بطريقة حذف المجهولين x و y بالكيفية السابعة

$$x = \frac{b_2c_3d_1 - c_2d_3b_1 + d_2c_3b_1 - b_2c_1d_3 + c_1d_3b_2 - b_2c_3d_1}{a_2b_3c_1 - b_3c_1a_2 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 + b_3c_1a_2 - a_3b_2c_1}$$

فإذا وضع هذا المقدار في إحدى المعادلتين ذاتي المجهولين المتبقيتين من إجراء العمل توصل إلى مقدار x وإذا وضع مقدارا x و y في إحدى المعادلات الثلاث المعلومة توصل إلى مقدار z لكن يمكن استخراج مقدار z و x بطريقة مختصرة وذلك بالتنبيه على أن المعادلات الثلاث لا تتغير إذا غيرت فيها الرموز

• و ه و ه و ه و ه و ه و ه بالرموز

و ه و ه و ه و ه و ه و ه

فحينئذ يكون التغيير جازا في الارتباطات المستخرجة من المعادلات المذكورة
فإذا أجرى هذا التغيير في مقدار ه يحدث

$$\begin{aligned} \text{ه} &= \frac{\text{و ه} - \text{و ه} + \text{و ه} - \text{و ه} + \text{و ه} - \text{و ه}}{\text{و ه} - \text{و ه} + \text{و ه} - \text{و ه} + \text{و ه} - \text{و ه}} \end{aligned}$$

وإذا غيرت علامات جميع حدود هذا الناتج وغيّر ترتيب الحدود يحدث

$$\begin{aligned} \text{ه} &= \frac{\text{و ه} - \text{و ه} + \text{و ه} - \text{و ه} + \text{و ه} - \text{و ه}}{\text{و ه} - \text{و ه} + \text{و ه} - \text{و ه} + \text{و ه} - \text{و ه}} \end{aligned}$$

وبتغيير مناظر للمتقدم يحدث

$$\begin{aligned} \text{ع} &= \frac{\text{و ه} - \text{و ه} + \text{و ه} - \text{و ه} + \text{و ه} - \text{و ه}}{\text{و ه} - \text{و ه} + \text{و ه} - \text{و ه} + \text{و ه} - \text{و ه}} \end{aligned}$$

ثم يجري هذا العمل إذا أريد استخراج مقادير أربعة مجاهيل من أربع
معادلات ذات أربعة مجاهيل ومن خمس معادلات ذات خمسة مجاهيل
وهلم جرا

(٤٩) بقرن النواتج المتقدمة بالمعادلات الحادثة منها تلك النواتج
يحدث قاعدة ينبغي تصورها الكتابة هذه النواتج أي المقادير بدون اجراء عمل
المعادلات وهي أن يقال

أولا لتصيل المقام المشترك لمقادير ه و ه المستخرجين من
معادلتين ذات مجهولين يؤخذ مكررا ه من المعادلة الاولى ويركب
منهما الحدان ه و ه مقصولين عن بعضهما بالعلامة - فيصيران
ه ه ثم يوضع على الحرف الأخير من كل حد هذه العلامة -

فيصيران ه ه وهو المقام المطلوب لتصيل بسط مقدار أحد
المجهولين بغير تكرار هذا المجهول في المقام المشترك بالحد المعلوم بدون تغيير

العلامة فيكون بسط مقدار هـ هكذا يفرق بـ هـ وسط مقدار

هـ هكذا هـ هـ هـ

وثانيا لاستخراج المقام المشترك لقادير هـ و هـ و هـ المستخرجة من المعادلات الثلاث المحتوية على ثلاثة مجاهيل يؤخذ المكرران هـ و هـ ويركب منهما الحدان هـ و هـ ثم يفصلان عن بعضهما بالعلامة - فيصيران هـ هـ - هـ ثم يدخل المكرر الثالث هـ في آخر وسط وأول كل من الحدين المذكورين على التوالي فيحدث بإدخاله في الأول هـ هـ و هـ هـ و هـ هـ وفي الثاني هـ هـ و هـ هـ و هـ هـ ثم يجعل لكل من الحدين الأولين ذوى الثلاثة حروف علامة الحد ذى الحرفين المكون له ثم تغير علامة الحدود التالية على التبادل فيحدث

هـ هـ - هـ هـ + هـ هـ - هـ هـ + هـ هـ - هـ هـ

ثم توضع هذه العلامة - على ثانى حرف من كل حد وهذه هـ على ثالث حرف أيضا فيحدث المقام المشترك وهو

هـ هـ - هـ هـ + هـ هـ - هـ هـ + هـ هـ - هـ هـ

ولاستنتاج بسط أحد مقادير المجاهيل الثلاثة بغير مكبر المجهول بالحرف المعلوم في المقام المشترك

فإذا أريد استخراج بسط مقدار المجهول هـ مثلا بغير في المقام المشترك مكرره هـ بالحرف المعلوم و فيحدث

هـ هـ - هـ هـ + هـ هـ - هـ هـ + هـ هـ - هـ هـ

وإذا أريد استخراج يقادير المجاهيل من أربع معادلات ذوات أربعة مجاهيل أو خمس معادلات ذوات خمسة مجاهيل وهكذا تجري عليها أعمال كالأعمال المتقدمة

(٥٠) يمكن استعمال القوانين العمومية المتقدمة في حل معادلات

مخصوصة وذلك بان تغير فيها الحروف بمقاديرها من المعادلات المعالومة يتم قسم
 عملها لكن حل المعادلات الرقمية من اول الامر انحصر

(٥١) البحت في هذه المقادير ثبت لسانه يمكن أن يحدث من حل
 المعادلات ذوات الدرجة الاولى أربعة أنواع من المقادير

الاولى المقادير الموجبة والثاني المقادير السالبة والثالث المقادير
 التي بهذه الصورة $\frac{a}{b}$ أو اللانهائية والرابع المقادير التي بهذه الصورة $\frac{a}{b}$
 أو غير الممينة وقيل علم مما تراء أنه اذا كانت عدد المعادلات m من عدد
 الجاهيل المحتوية عليها كانت جلة المعادلات ممكنة الحل ومنتهية الا اذا كانت
 محتوية على معادلة قاسدة أو على معادلات غير متوافقة فالحل غير ممكن
 ومتى كانت الجملة محتوية على معادلات متطابقة أو على بعض معادلات
 متداخلة في بعضها فالحل غير معين اذا تقرر ذلك نطبقه على معادلة عومية
 ذات مجهول واحد وعلى معادلتين عوميتين ذاتي مجهولين فتقول -

اولا اذا فرض معادلة $a = b$ واستخرج منها مقدار $a = b$
 وفرض فيه أيضا $c = d$ يحدث $a = b$ أعني أن مقدار a
 على مقتضى ما تقدم يكون غير محدود في الكبر فالمعادلة لا تصحق بإى مقدار
 محدود لاها تصير $a \times b = c$ وهى معادلة قاسدة لان الصفر
 المضروب في عدد محدود لا يساوي غير ابدام مقدار d
 وثانيا اذا فرضت معادلتان ذاتا مجهولين

$a + b = c$ و $d + e = f$ واستخرج منهما
 المقداران

$$a = \frac{c - b}{1} \quad \text{و} \quad d = \frac{f - e}{1}$$

وجعل في هذين المقدارين العموميين $a = d$ و $b = e$

أى $c - b = f - e$ و $d + e = f$ أى $d = f - e$

(الفتح)

جميع المقادير المحدودة تحقق المعادلة المعروفة لانتها الصير . $\times = \cdot$.
وهي معادلة متطابقة لان الصفر اذا ضرب في عددا ما محدود يحدث حاصل
مساويا للصفر .

واذا فرض معادلتان ذاتا مجهولين

$\cdot + \cdot = \cdot$ و $\cdot + \cdot = \cdot$ و $\cdot + \cdot = \cdot$ واستخرج منها
المقداران

$$\cdot = \frac{\cdot - \cdot}{\cdot - \cdot} \quad \text{و} \quad \cdot = \frac{\cdot - \cdot}{\cdot - \cdot}$$

وبجعل في هذين المقدارين العموميين $\cdot = \cdot$ و $\cdot = \cdot$

$\cdot = \cdot$ أي $\cdot = \cdot$ و $\cdot = \cdot$ يحدث $\cdot = \cdot$ في

وهو مقدار غير معين وحيث شوهد فيما تقدم أن غير المعين لا يقع الا اذا كان
عدد المعادلات اقل من عدد الجاهيل يلزم البرهنة على أن هاتين المعادلتين

المعلومتين ليستا الا واحدة لانه اذا استخرج من القرضين المتقدمين $\cdot = \cdot$

$$\cdot = \cdot \quad \text{و} \quad \cdot = \cdot \quad \text{بالتقسيم على الحروف المعطاة النسب}$$

$$\frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\cdot}{\cdot} \quad \text{و} \quad \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\cdot}{\cdot} \quad \text{ورمى لهذا الحرف لـ يحدث}$$

$$\frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\cdot}{\cdot} \quad \text{و} \quad \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\cdot}{\cdot} \quad \text{و} \quad \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\cdot}{\cdot} \quad \text{و} \quad \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\cdot}{\cdot}$$

واذا وضع في المعادلة $\cdot = \cdot$ بدل الرموز \cdot و \cdot و \cdot

مقاديرها المتقدمة توّل الى $\cdot = \cdot$ و $\cdot = \cdot$ وهي

معادلة لا تختلف المعادلة الثانية الا بضرب طرفيها في \cdot فينتج المعادلتان

المفروضتان ليستا الا واحدة

واذا كان مقدار \cdot بهذه الصورة \cdot يكون مقدار \cdot كذلك لان

مقام

• (٢٤) •

مقام صـ مساو لصفر ظهري الا البرهنة على أن بسطه مساو لصفر أيضا
أي على أن $\frac{هـ}{و} = \frac{ز}{ح}$ فيقال حيث تقدم أن .

$\frac{هـ}{و} = \frac{ز}{ح}$ و $\frac{هـ}{و} = \frac{ز}{ح}$ يحدث $\frac{هـ}{و} = \frac{ز}{ح}$ أو $\frac{هـ}{و} = \frac{ز}{ح}$ فاذن
يكون مقدار صـ بهذه الصورة ÷

• (تنبيهات) •

الاول قد نتج من جعل $\frac{هـ}{و} = \frac{ز}{ح}$ و $\frac{هـ}{و} = \frac{ز}{ح}$ أن مقدارى
صـ و هـ يكونان بهذه الصورة ÷ فإذا ضم لهذين القرضين فرض
 $\frac{هـ}{و} = \frac{ز}{ح}$ و $\frac{هـ}{و} = \frac{ز}{ح}$ حدث ناتج من الاول مقدارا صـ و هـ
يقتنع ان يكونا معينين غير ان بينهما نسبة ثابتة لانه اذا جعل في المعادلتين
المعلومتين $\frac{هـ}{و} = \frac{ز}{ح}$ و $\frac{هـ}{و} = \frac{ز}{ح}$ الا الى حـ صـ + و هـ =
و حـ صـ + و هـ = ومنها يحدث
 $\frac{هـ}{و} = \frac{ز}{ح}$ و $\frac{هـ}{و} = \frac{ز}{ح}$

وحيث نتج من فرض $\frac{هـ}{و} = \frac{ز}{ح}$ و $\frac{هـ}{و} = \frac{ز}{ح}$ أن $\frac{هـ}{و} = \frac{ز}{ح}$ يؤل مقدارا
صـ الى صـ = $\frac{هـ}{و}$ و منه يحدث $\frac{هـ}{و} = \frac{ز}{ح}$ أعني
أن النسبة بين مقدارى صـ و هـ مساوية $\frac{هـ}{و} = \frac{ز}{ح}$ وهى نسبة
ثابتة

الثانى قد ظهر من المناقشة المتقدمة أن مقدارى المجهولين بفرد محتوية على
معادلتين ذاتى مجهولين كالمقدمةتين يكونان في آن واحد لانهما بين أو غير
معينين لكن هذا لا يتيسر في جملة معادلتين متشعبتين ذاتى مجهولين حسن كل
الثالث قد شوهد أن المقدار الذى بهذه الصورة ÷ يدل على ان المقدار غير
معين وقد يدل مع ذلك على وجوده مضروب مشتركين حدى الكسر مساو
لصفر حيز فرض فرض مخصوص هذين الحدين فإذا فرض مثلا

منه $\frac{x^2}{x^2 - 1}$ وبمثل فيه $x = 1$ الى $x = 1$ لكن
 حيث أي حدى الكسر $\frac{x^2}{x^2 - 1}$ يقبلان القسمة على $x = 1$ وأن
 احدهما يساوى $(x - 1)$ والآخر يساوى $(x + 1)$
 حدث منه $\frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)}$ أو $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} = 1$
 بحذف المضروب المشترك

فإذا فرض الآن $x = 1$ الى مقدار منه الى $\frac{x^2}{x^2} = 1$
 فاذن يكون مقدار منه معينا

وإذا فرض أيضا مقدار منه $\frac{x^2}{x^2 - 1}$ ان $x = 1$ الى
 الى $x = 1$ لكن حيث أن مقدار منه يمكن وضعه بهذه الصورة
 منه $\frac{x^2}{x^2 - 1}$ وان حذاء قابلان للقسمة على $x = 1$ يصير
 منه $\frac{x^2}{x^2 - 1}$ بحذف المضروب المشترك

فإذا فرض الآن في هذا المقدار أن $x = 1$ الى $x = 1$
 وإذا فرض أيضا مقدار منه $\frac{x^2}{x^2 - 1}$ أن $x = 1$ الى $x = 1$
 ومن المعلوم أنه يوجد مضروب مشترك بين حدى الكسر $\frac{x^2}{x^2 - 1}$ فلتعينه
 بضرب حذاء في x فيحدث منه $\frac{x^3}{x^2 - 1}$ ثم بقسمة حدى
 هذا المقدار على المضروب المشترك x يؤلى الى $\frac{x^2}{x^2 - 1}$ ثم
 بفرض $x = 1$ يؤلى هذا المقدار الى 1

فحينئذ مقدار منه المساوى 1 يدل في بعض الاحيان على وجود
 مضروب مشترك بين حدى الكسر المبين به مقدار المجهول ففى تحقق وجوده
 نزم اولاً حذفه ثم اجراء القروض التى بها يؤلى حدى الكسر الى صفر حينئذ

يصير مقدار الجذور في هذه الصورة $\frac{2}{3}$ أو $\frac{1}{3}$ أو $\frac{2}{5}$ أو $\frac{1}{5}$ أعني أنه منته
أو عدى أو لا نهائي

•(الباب الثالث)•

•(في المربع والجذر التربيعي والمعادلات والمسائل التي بدرجة ثانية)

•(في المربع والجذر التربيعي)•

(٥٢) قد تقدم أن مربع الكمية هو حاصل ضرب مضروبين كل منهما
مساوئها وأن الجذر التربيعي للكمية مقدار إذا رفع إلى درجة الثانية
فحصلت تلك الكمية فينتد يكون \sqrt{x} مربع x والجذر التربيعي
للحد x ومربع \sqrt{x} هو x

(٥٣) مربع الحد x يكون مساويا x^2 $\times x = x^2$ $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$
(قاعدة) لتربيع جذر \sqrt{x} مكرره وتضاعف أسس كل من حروفه
(قاعدة أخرى عكس المتقدمة) استخراج جذر مربع x^2 يكون باستخراج
الجذر التربيعي مكرره ثم تنصيف أسس كل من حروفه فينتد
 $\sqrt{x^2} = x$ $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

•(تنبيه)•

الحد يكون مربعا كاملا في كان مكرره مربعا كاملا ركنت أسس جميع
حروفه زوجية فإن لم يكن كذلك فليس يكمل وجب أن يوضع $\frac{1}{2}$ في
العلامة $\sqrt{\quad}$ والكمية لما قبله من ذلك تسمى $\frac{1}{2}$ غير ركنية
أهم أوجزا بدرجة ثانية وثالثة نحو $\sqrt{x^2 + 2x + 1}$ فإن كانت
محتوية على جذر منطبق ارتكبت شذوية على جذرية كن استخراج جذر
كمية جذرية

(٥٤) اختصار الجذر الأسس في بدرجة ثانية من أسس على قاعدة هي
أن الجذر التربيعي سائل ضرب يكون مساويا حاصل ضرب الجذر التربيعي

$$\begin{array}{c} ٢٥ \\ ٥٧٢٢ \end{array} \left| = \begin{array}{c} ٢٤ \\ ٥٦١٦ \end{array} \right| = \begin{array}{c} ٢٣ \\ ٥٥٠٨ \end{array} \left| = \begin{array}{c} ٢٢ \\ ٥٤٠٠ \end{array} \right| = \begin{array}{c} ٢١ \\ ٥٣٠٠ \end{array}$$

(٥٦) ما تقدم في (بند ٥٣) من قواعد الترييع واخذ الجذر الترييعي لمحدث
تعرض فيه للعلامة وتعرض لها فتقول
اولا ان مربع أى حد يكون موجبا دائما لانه متصل من ضرب حدين
مضدين في العلامة

وثانيا ان الجذر الترييعي لمحدث موجب كحد \pm يكون \pm
أو $-$ لان \pm كلا منهما اذا رفع الى الدرجة الثانية حدث منه \pm
فيكون الجذر الترييعي لمحدث متبوعا بالعلامة \pm أو $-$ وتوضع هذه
العلامة المضاعفة \pm امامه ملفوظا بها زائدا وناقصا فينتد يكون

$$\pm = \pm$$

وان الجذرين الترييعيين لحد سالب كحد $-$ لا وجود لهما لان \pm كل
كمية سالبة او موجبة اذا رفعت الى القوة الثانية حدث منها ناتج موجب
فينتد يكون \pm هو كمية قضيائية او مقدار تخيلي والكمية الحقيقية
سواء كانت موجبة او سالبة جذرية او غير جذرية هي ما عدا التخيلية

(٥٧) نتابع بتوصل اليه ابراهيم مشابها للمتقدمة
الاولى لرفع حد الى القوة الثالثة أى التكعيب يكعب ككرره وتثلاث اسم
بحروفه فتكعيب حد ٢٣ هو ٢٤٢ و ٢٦٩

الثانية لاستخراج الجذر التكعيبى لحد يستخرج الجذر التكعيبى لكرره ويتؤخذ
ثلاث كل من اسم حروفه فاجذر التكعيبى لحد ٢٧ هو ٣ و ٢٣

الثالثة لاختصار الجذر التكعيبى لحد \pm يتم بحد يستخرج الجذر التكعيبى
لمضاربه المكعبة الموجودة تحت علامة الجذر المسد كور ويوضع جذرها

مكرر العلامة الجذر فينتز

$$\sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢ \\ ٥٧ \end{array}} \sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢ \\ ٢٢ \\ ٨ \end{array}} = \sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢ \\ ٤٥ \\ ٤٠ \end{array}}$$

الرابعة لادخال مكررت تحت علامة تجذر تكعبي يرفع هذا المكرر الى القوة الثالثة ويضرب في الكمية الكائنة تحت العلامة المذكورة فينتز

$$\sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢ \\ ٢٧ \\ ٢٤ \end{array}} = \sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢ \\ ٥٢ \end{array}}$$

الخامسة علامة تكعيب تحت تكون دائما عين علامة الجذر وعلامة الجذر التكعبي تحت تكون ايضا عين علامة الجذر فينتز

$$\sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢ \\ ٢٦ \\ ٨ \end{array}} \sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢ \\ ٢٩ \\ ١٢٥ \end{array}} = \sqrt[3]{\begin{array}{c} ٢ \\ ٥٠ \end{array}}$$

(٥٨) استخراج الجذر التربيعي لكمية ذات حدود يتوقف على قاعدة تكوين مربع الكمية المذكورة وقد تقدمت قاعدة تكون مربع كمية

ذات حدين ككمية $(٥ + ٢)$ المساوية $٥ + ٢ + ٢ + ٥$ فاذا اريد ترتيب كمية ذات ثلاثة حدود ككمية $٥ + ٢ + ٥$ يرمز للثتين $٥ + ٢$ بالحرف $هـ$ فيحدث

$$(٥ + ٢ + ٥) = (هـ + هـ) = ٥ + ٢ + ٥ + هـ + هـ$$

وببدال $هـ$ بمقداره يحدث

$$(٥ + ٢ + ٥) = (٥ + ٢) + ٥ + (٥ + ٢) = ٥ + ٢ + ٥ + ٥ + ٢ + ٥$$

اعني ان مربع كمية ذات ثلاثة حدود يتركب من حاصل جمع مربعات جميع حدودها ومن ضعف حاصل ضرب حدودها منفي

وهذه القاعدة مطردة في كل كمية ذات حدود لانه اذا فرض انها متحققة في كمية ذات حدود عدد حدودها $م$ كالكمية $٥ + ٢ + ٥ + ٥ + ٢ + ٥$

تكون

تكون متحققة أيضا في كمية ذات حدود عيدها يزيد عن عدد حدود
الاولى بواحد كالكمية $١ + ٤ + ٩ + ١٦ + ٢٥ + \dots + ١ + ٤$
لانه اذا ضرب بالحرف ١ للكمية الاولى $١ + ٤ + ٩ + ١٦ + ٢٥ + \dots + ١ + ٤$
فترجع الاخرى يكون $(١ + ٤) = ١ + ٤ + ٩ + ١٦ + ٢٥ + \dots + ١ + ٤$
ثم يبدل ١ من ١ بمقداره فيصير

$$(١ + ٤ + ٩ + ١٦ + ٢٥ + \dots + ١ + ٤) = (١ + ٤ + ٩ + ١٦ + ٢٥ + \dots + ١ + ٤) + ١$$

وحيث أن الجزء الاول $(١ + ٤ + ٩ + ١٦ + ٢٥ + \dots + ١ + ٤)$ من الطرف
الثاني عين مربع الكمية ذات الحدود الاولى التي عدد حدودها ١ وان
الجزء الثاني ١ $(١ + ٤ + ٩ + ١٦ + ٢٥ + \dots + ١ + ٤)$ من الطرف المذكور
مركب من ضعف حاصل ضرب الحدود التي عددتها ١ في الحد الجديد
مركب من ضعف حواصل ضرب الحدود متتالي وان الجزء الثالث وهو ١
من الطرف المذكور يكون من تربع الحد الجديد يكون مربع كمية ذات
حدود عددتها $١ + ٤$ متقلا على حاصل جمع مربعات جميع حدودها
وضعف حواصل ضرب حدودها متتالي فاذا كانت قاعدة التكرير هذه مطردة
في كمية ذات حدود تكون مطردة أيضا في كمية ذات حدود عددتها زائد عن
الاولى بواحد حيث كانت مطردة في كمية ذات ثلاثة حدود تكون مطردة في كمية
ذات أربعة حدود وخمسة حدود وهكذا

• (تنبية) •

يلفظ بهذه القاعدة بكمية نافعة في النتائج التي يراد استخراجها بان يقال
مربع كمية ذات حدود يحتوي على مربع الحد الاول زائدا ضعف حاصل
ضرب الحد الاول في الثاني زائدا مربع الثاني زائدا ضعف حاصل ضرب كل
من الحدين الاول والثاني في الثالث زائدا بمربع الثالث زائدا ضعف حواصل

ضرب كل من الحد الاول والثاني والثالث في الحد الرابع زائدا مربع الحد الرابع وهكذا

(٥٩) اذا طلب الآن استخراج الجذر التربيعي لكمية ذات حدود كالكمية

أ + ب + ج + د + هـ + ز + ح + ط + ك + ل + م + ن + س + ع + ف + ق + ر + ش + ص + ض + ظ + ط + ك + ل + م + ن + س + ع + ف + ق + ر + ش + ص + ض + ظ
الجذر المطلوب ثم يفرض أن هاتين الكميتين مرتبتان بحسب الدرجات التنازلية لحرف كالحرف م يجرى العمل هكذا

$$\begin{array}{r|l} \text{أ} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} + \text{هـ} + \text{ز} + \text{ح} + \text{ط} + \text{ك} + \text{ل} + \text{م} + \text{ن} + \text{س} + \text{ع} + \text{ف} + \text{ق} + \text{ر} + \text{ش} + \text{ص} + \text{ض} + \text{ظ} & \text{أ} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} + \text{هـ} + \text{ز} + \text{ح} + \text{ط} + \text{ك} + \text{ل} + \text{م} + \text{ن} + \text{س} + \text{ع} + \text{ف} + \text{ق} + \text{ر} + \text{ش} + \text{ص} + \text{ض} + \text{ظ} \\ \hline & \text{أ} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} + \text{هـ} + \text{ز} + \text{ح} + \text{ط} + \text{ك} + \text{ل} + \text{م} + \text{ن} + \text{س} + \text{ع} + \text{ف} + \text{ق} + \text{ر} + \text{ش} + \text{ص} + \text{ض} + \text{ظ} \end{array}$$

فالكمية ذات الحدود أ + ب + ج + د + هـ + ز + ح + ط + ك + ل + م + ن + س + ع + ف + ق + ر + ش + ص + ض + ظ يمكن اعتبارها

حاصل ضرب كمية أ + ب + ج + د + هـ + ز + ح + ط + ك + ل + م + ن + س + ع + ف + ق + ر + ش + ص + ض + ظ في أ + ب + ج + د + هـ + ز + ح + ط + ك + ل + م + ن + س + ع + ف + ق + ر + ش + ص + ض + ظ

وحيث أن هذا الحاصل مرتبة كضروبيه بحسب الدرجات التنازلية للحرف

م المذكور يكون حاصل ضرب أ في أ أي مربع أ (كافي تنبيه

بند ١٤) فبناء عليه يستخرج أ وهو اول حد من الجذر باخذ الجذر

التربيعي للحد الاول من الكمية ذات الحدود المعروفة ثم يربع هذا الحد الناتج

ويطرح منها منسمى الحد الاول وهو أ ويكون الحد الثاني ب من الكمية

المذكورة ضعف حاصل ضرب اول حد من الجذر في حده الثاني لانه اذا رجع

الى أ + ب + ج + د + هـ + ز + ح + ط + ك + ل + م + ن + س + ع + ف + ق + ر + ش + ص + ض + ظ

من كل من الطرفين ووضع ر مضروباً مشتركاً يحدث

ب + ج + د + هـ + ز + ح + ط + ك + ل + م + ن + س + ع + ف + ق + ر + ش + ص + ض + ظ = ر (أ + ب) واذا وضع بدل ر مقداره

يحدث

$$س + ح + د + ز + الخ = (س + ح + د + ز + أ + ب + ج + د + هـ + ز + الخ)$$
 وحيث ان الكمية ذات الحدود $س + ح + د + ز + الخ$ المرتبة بحسب
 الدرجات التناولية لحرف الترتيب مساوية لحاصل ضرب الكمية
 $س + ح + د + ز + الخ$ في الكمية $ر = أ + ب + ج + د + هـ + ز + الخ$
 المرتبتين كترتيبها يكون الحد الاول $س$ من الاول مساويا لحاصل ضرب
 حد $س$ في $ر = أ$ من الكميتين الاخرين وبناء عليه يستنتج الحد الثاني
 $س$ من الجذر بتقسيم الحد الاول $س$ من الباقي الاول على $ر = أ$ وهو ضعف
 الحد الاول من الجذر وحيث علم حد $س$ يطرح ضعف حاصل ضرب الحد
 الاول من الجذر في الحد الثاني منه ثم مربع الحد الثاني اى يطرح حاصل ضرب
 $ر = أ + ب + ج + د + ز$ من الكمية $س + ح + د + ز + الخ$ فيبقى باقى بهذه
 الصورة $ح + د + ز + الخ$ حده الاول ضعف حاصل ضرب اول حده من
 الجذر في الحد الثالث منه $ح$ لانه اذا رمز بالحرف $ر$ للعدين $أ + ب + ج + د + ز$
 وبالحرف $ر$ للحدود الباقية من الجذر وهى $ح + د + ز + الخ$ ينتج

$$س + ح + د + ز + الخ = (س + ح + د + ز + أ + ب + ج + د + هـ + ز + الخ)$$

 او $س + ح + د + ز + الخ = (س + ح + د + ز + أ + ب + ج + د + هـ + ز + الخ)$
 وحيث ان الكمية $س + ح + د + ز + الخ$ حاصل ضرب الكمية $ح + د + ز + الخ$
 في الكمية $ر = أ + ب + ج + د + هـ + ز + الخ$ المرتبتين كترتيبها يكون $ح$
 مساويا لحاصل ضرب $ح$ في $ر = أ$ وبناء عليه يستنتج الحد الثالث من الجذر

بتقسيم الحد الأول من الباقي الثاني على ضعف الحد الأول من الجذر
المذكور ومثل ذلك يجري في استخراج باقي حدود الجذر وينتج من ذلك قاعدة
تذكرها تقول

(قاعدة) عند استخراج الجذر التربيعي للكمية ذات حدود ترتب بحسب
الدرجات التصاعدية أو التنازلية لأحد طرفيها ثم يستخرج الجذر التربيعي
لحدها الأول فيكون الحد الأول من الجذر المطلوب ثم يربع هذا الحد ويطرح
من الكمية ذات الحدود المعروفة ثم يقسم الحد الثاني من الكمية المعروفة على
ضعف الحد الأول من الجذر فينتج الحد الثاني من الجذر المطلوب فيضاعف
حاصل ضرب أول حد من الجذر في الحد الثاني منه ثم يضم إلى الضعف
المذكور تربيع هذا الحد ويطرح المجموع من الباقي الأول ثم يقسم الحد
الأول من الباقي الجديد على ضعف الحد الأول من الجذر فينتج الحد الثالث
من الجذر ثم يكون ضعف حاصل ضرب الحد الأول والثاني من الجذر في الثالث
ويضاف على الحاصل مربع حد الجذر الثالث ويطرح المجموع من الباقي الثاني
ولايجاد الحد الرابع من الجذر يقسم الحد الأول من الباقي الثالث على ضعف
الحد الأول من الجذر ثم يجري باقي العمل على أسلوب ما تقدم
ولتطبيق هذه القاعدة على استخراج الجذر التربيعي للكمية ذات الحدود
٢٨ ٢٢ ١٦ ١٢ ٩ ٦ ٤ ٣ ٢ ١ ٠ ١٢ ٠ ٢ ترتب بحسب
الدرجات التصاعدية للرف * ويجري العمل هكذا

• (٢)

الباقى الثانى فيكون الباقي الجديد صفرا فاذا ن يكون الجذر التريعى للكمية ذات الحدود المعلومة $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + 2$

• (تأيه) •

الاول يمكن ان يجرى هنا ما يجرى في القسمة بطرح كل حاصل ضرب واختصار الحدود المتشابهة من اول الامر هكذا

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + 2 \\
 \underline{-(x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + 2)} \\
 0
 \end{array}$$

الثانى اذا غيرت علامات حدود الجذر $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + 2$ فقدره المجرد لا يتغير لانه اذا وحز للكمية $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + 2$ بالحرف x تكون الكمية الجديدة الحادثة بعد التغير $-x^5 + 5x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 2x$ وتكون الكمية ذات الحدود المعلومة $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + 2$ مربعا كاملا للكمية x فتكون كذلك للكمية $-x$ (كافى بند ٥٦) وحيث يكون جذر الكمية المعلومة مقداران متقيران هما

$$(x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + 2) \text{ و } -(x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + 2)$$

الثالث الكمية ذات الحدود المرتبة بحسب حرف مربع كامل اذا كان حدها الاول مربعا كاملا وحدها الثانى قابلا للقسمة على ضعف جذر الحد الاول او كان حدها الاخير مربعا كاملا والذى قبله قابلا للقسمة على ضعف

• (٨٤) •

واقعت الكميات الموضوعة تحت علامتهما جذرا

$$\sqrt{2} \text{ و } \sqrt{3}$$

متشابهان وكذلك جذرا $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$

• (الكلام على جمع تلك الجذور وطرحها) •

مكرر الجذر يدل على عدد مرات تكرار هذا الجذر فحينئذ جمع جذرين متشابهين أو طرحهما يكون يجمع أو طرح مكررينهما ثم وضع حاصل الجمع أو باقي الطرح امام الجذر المشتركة فاذن يكون

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ و } \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \text{ و } \sqrt{2} - \sqrt{8} = \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{18} = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ و } \sqrt{2} - \sqrt{18} = \sqrt{2} - 3\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

ومنى كان الجذران غير متشابهين لا يمكن بيان حاصل جمعهما أو قائلهما إلا بالعلامة

• (في الكلام على ضرب تلك الجذور) •

لايجاد حاصل ضرب جذرين متحدى الدرجة تضرب الكميتان الموضوعتان تحت علامة الجذر في بعضهما ثم يوضع الحاصل تحت علامة الجذر المذكور مثال ذلك

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \text{ لان } (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) = 2$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6} \text{ و } \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{4} = 2\sqrt{2} \text{ و } \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = 2\sqrt{4} = 4 \text{ و } \sqrt{8} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{4} = 4$$

ومثل هذا يجري في ايجاد حاصل ضرب جذرين بدرجة ثالثة (وكان يمكن الاستغناء عن اثبات هذه القاعدة بما تقدم في (بند ٥٤) من أن $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \text{ فاذن يقال } \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$

واذا كان للجذرين مكرران يضرب هذان المكرران في بعضهما ويوضع حاصل ضربهما امام الجذر فحينئذ

• (٨٥) •

$$\sqrt{5} \times \sqrt{7} = \sqrt{35} \quad \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6} \quad \sqrt{4} \times \sqrt{5} = \sqrt{20}$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10} \quad \sqrt{3} \times \sqrt{4} = \sqrt{12} \quad \sqrt{5} \times \sqrt{6} = \sqrt{30}$$

• (في قصة الجذور) •

لتقسيم جذر على آخر متحددين في الدرجة تقسم احدهما الكمييتين اللتين تحت علامتي الجذر على الاخرى ويوضع على خارج القسمة علامة الجذر فينتد

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \right) \text{ لان } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ ويكون ايضا } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$



وكذا يقال فيما اذا كان الجذران بدرجة ثالثة

واذا كان للجذرين مكرران يقسم احدهما على الاخر ويوضع خارج قسمتهما امام الجذر فينتد

$$\sqrt{2} : \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \sqrt{4} : \sqrt{5} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} \quad \sqrt{6} : \sqrt{7} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$$

(٦٤) القواعد التي تقدم بيانها لا توافق حالة ضرب جذرين ثخينين ولا

تقسيم جذر حقيق على آخر ثخين

فعلى مقتضى التعريف يكون مربع $\sqrt{1} = 1$ مساويا $\sqrt{1} = 1$ أى

$$\sqrt{1} \times \sqrt{1} = 1 \quad \text{ومنه يحدث} \quad \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

فينتج من ذلك أن حسه

$$\sqrt{1} \times \sqrt{1} = 1 \quad \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \quad \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$$

$$\sqrt{4} \times \sqrt{4} = 4 \quad \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$$

$$\sqrt{6} \times \sqrt{6} = 6 \quad \sqrt{7} \times \sqrt{7} = 7$$

$$\sqrt{8} \times \sqrt{8} = 8 \quad \sqrt{9} \times \sqrt{9} = 9$$

$$\sqrt{10} \times \sqrt{10} = 10 \quad \sqrt{11} \times \sqrt{11} = 11$$

$$\sqrt{12} \times \sqrt{12} = 12 \quad \sqrt{13} \times \sqrt{13} = 13$$

$$\sqrt{14} \times \sqrt{14} = 14 \quad \sqrt{15} \times \sqrt{15} = 15$$

(٦٤) إذا كان مقام الكبراص من المهم تحويده الى منطبق -
فإذا كان المقام الاصم ذو الحد الواحد جذرا بدرجة ثانية لزم تصويده ضرب
كل من حدي الكسر في مقامه فينتد

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

وإذا كان المقام الاصم ذو الحد الواحد جذرا بدرجة ثانية يكتفى تصويده
ان يضرب كل من حدي الكسر في تربيع هذا المقام فينتد

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2 \times 2} = \frac{2}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$$

وإذا كان المقام الاصم مشتملا على كمية ذات حدين احدهما أو كلاهما جذر
بدرجة ثانية يكتفى تصويده ان يضرب حدي الكسر في كمية ذات حدين مركبة
من الحد الاول من المقام ومن حده الثاني مسجوقا به لامة مخالفة لعلامته
لان من المعلوم أن حاصل ضرب مجموع كيتين في فاضلهما يساوى فاضل
من بهما فإذا ن يكون

$$\frac{(\sqrt{2}-2)}{2} = \frac{(\sqrt{2}-2)}{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)} = \frac{1}{\sqrt{2}+2}$$

$$\frac{(\sqrt{2}+2)}{2} = \frac{(\sqrt{2}+2)}{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-2)} = \frac{1}{\sqrt{2}-2}$$

$$\frac{(\sqrt{2}-2\sqrt{2})}{2} = \frac{(\sqrt{2}-2\sqrt{2})}{(\sqrt{2}-2\sqrt{2})(\sqrt{2}+2\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}$$

$$\frac{(\sqrt{2}+2\sqrt{2})}{2} = \frac{(\sqrt{2}+2\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+2\sqrt{2})(\sqrt{2}-2\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}-2\sqrt{2}}$$

وهذه التصاويل تجري حين يكون المقام الاصم مشتملا على كمية ذات حدود
بعضها أو جميعها جذر بدرجة ثانية مثال ذلك

• (٨٧) •

مقدار $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$ يمكن اختيار مقامه كمية ذات حدين
حدها الاول $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ والثاني $\sqrt{5}$ فإذا ضرب كل من
حدي هذا الكسر في الكمية ذات الحدين المذكورة بأن غيرت علامة أحدها
الثاني آل

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2}$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{2 + 2\sqrt{6} + 3 - 5} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$$

وبضرب حدي هذا الناتج الأخير في $(1 + \sqrt{6})$ يحدث

$$\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})(1 + \sqrt{6})}{2\sqrt{6}(1 + \sqrt{6})} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$$

وباختصاره يحدث

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$$

(٦٥) إذا اشتقت متساوية على كيات منطقة وكيات غير منطقة كانت
أجزاء المنطقة في أحد الطرفين مساوية لجزئها في الطرف الآخر وكذا الجزء
غير المنطقة

فإذا فرضت متساوية $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ وفرض أن $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ و
غير منطقي وأن $\sqrt{5}$ منطقي كان $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ و
لأنه تحويل $\sqrt{2}$ إلى الطرف الأيمن من المتساوية $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ هو
 $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5} = 0$

و $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ بحيث تكون كيات a و b و c و d جذرية
والوصول الى ذلك يرجع كل من طرفي المتساوية

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c} + \sqrt{d} \quad \text{فيحدث}$$

$$a + b + 2\sqrt{ab} = c + d + 2\sqrt{cd} \quad \text{ويقتضى ما تقدم في (٦٥) يحدث}$$

$$a + b = c + d \quad \text{و (١) } \dots\dots\dots \text{ و (٢) } \dots\dots\dots$$

واذا رجع كل من طرفي المتساوية (١) وطرح من النتائج المتساوية (٢)

$$\sqrt{ab} = \sqrt{cd} \quad \text{يحدث} \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c} + \sqrt{d} \quad \text{ومنها يحدث}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{c} - \sqrt{d} \quad \text{(٣) } \dots\dots\dots$$

ويحدث أيضا من المتساويتين (١) و (٣)

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c} + \sqrt{d} \quad \text{و} \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{c} - \sqrt{d} \quad \text{و} \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{c} - \sqrt{d}$$

وحيث فرض أن a و b منطقان يلزم أن يكون $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ مربعا

كاملا فاذا رمز لهذا المربع بالحرف h يحدث

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c} + \sqrt{d} \quad \text{و (٤) } \dots\dots\dots \text{ و (٥) } \dots\dots\dots$$

أعني أنه يلزم لا مكان تحويل مقدار $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ الى مقدار بهذه الصورة

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c} + \sqrt{d}$ أن يكون $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ مربعا كاملا فاذا رمز لهذا المربع

بالحرف h يعلم المقداران a و b من اتانوين

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{h} \quad \text{و} \quad \frac{a-b}{2} = \sqrt{h}$$

(٩٠)

(تنبیه)

تدفع في المساوية $\sqrt{5} + \sqrt{7} = \sqrt{5} + \sqrt{7}$ ان الجذرين
 الاربعة موجبة وحيث تقدم ان $\sqrt{5} + \sqrt{7} = \sqrt{5} + \sqrt{7}$
 ينبج منه ان $\sqrt{5} = \sqrt{7}$ فاذن يلزم ان تكون علامتا الجذرين
 $\sqrt{5}$ و $\sqrt{7}$ متضدين فتكون علامة $\sqrt{5}$ موجبة اذا كانت
 علامتا $\sqrt{5}$ و $\sqrt{7}$ متضدين وتكون علامته سالبة اذا كانت علامتا
 $\sqrt{5}$ و $\sqrt{7}$ متضادتين اعني اذا كانت علامة $\sqrt{5}$ موجبة تكون
 علامتا $\sqrt{5}$ و $\sqrt{7}$ متضدين وان كانت علامة $\sqrt{5}$ سالبة
 تكون علامتا $\sqrt{5}$ و $\sqrt{7}$ متضادتين

ولنطبق ما ذكرناه على مثالين فنقول

المثال الاول اذا اريد تحويل المقدار $\sqrt{50} + \sqrt{7}$ الى جذرين
 منفردين يكون بمقتضى ما تقدم $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$ ومنه
 يحدث $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ و $\sqrt{7} = \sqrt{7}$ وحيث ان $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ مربع كامل
 يمكن تحويل مقدار $\sqrt{50} + \sqrt{7}$ الى مقدار بهذه الصورة
 $\sqrt{50} + \sqrt{7} = 5\sqrt{2} + \sqrt{7}$ وحيث تقدم ان $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ يكون $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
 او $\sqrt{50} = 3$ ويكون ايضا $\sqrt{50} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$ و $\sqrt{7} = \sqrt{7}$ فاذن يكون
 علامتا $\sqrt{50}$ و $\sqrt{7}$ متضدين لان $\sqrt{50}$ له علامة +
 المثال الثاني اذا فرض ان المراد تحويل المقدار $\sqrt{50} - \sqrt{7}$ الى
 ما ذكر يكون بمقتضى ما تقدم $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ و $\sqrt{7} = \sqrt{7}$ وحيث ان $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

اعني

لا يكون جذر الطرف الثاني متبوعاً بعلامة \pm وحده بل جذر الطرف الأول كذلك فاذن يحدث $\pm = \pm$ و $\pm = \mp$ ومنها يحدث أربعة مقادير المجهول x وهي

$$\begin{aligned} &+x = +\sqrt{m} \text{ و } +x = -\sqrt{m} \text{ و} \\ &-x = +\sqrt{m} \text{ و } -x = -\sqrt{m} \end{aligned}$$

فإذا غيرت علامتا المقدارين الأخيرين سارا متطابقين مع الأولين الحادثين من مقدارى الجذر التربيعى المسبوق بعلامة \pm للطرف الثانى فاذن لا يكون المجهول x الا مقداران حقيقيان

وتحقق أن x له مقداران فقط ان يوضع بدل m المقدار $(\sqrt{m})^2$ هو ضاعنه فى المعادلة $x^2 = \frac{m}{x}$ م فتول الى $x^3 - (\sqrt{m})^2 x = 0$

$$\text{وحيث أن } x^3 - (\sqrt{m})^2 x = (x + \sqrt{m})(x - \sqrt{m})x = 0$$

فلاجل أن يكون الطرف الاول الذى هو حاصل ضرب مساويا لصفر يلزم أن يكون كل من مضروبى الطرف الاول مساويا لصفر اذا تقرر ذلك فوصل الى

$$\begin{aligned} &x + \sqrt{m} = 0 \text{ و } x - \sqrt{m} = 0 \text{ ومنها يحدث} \\ &x = -\sqrt{m} \text{ و } x = +\sqrt{m} \end{aligned}$$

فالجهول الداخلى فى المعادلة ذات الدرجة الثانية غير التامة يكون له مقداران فقط يسميان جذرى المعادلة وهذان الجذران يكونان متساويين ومتخالفين فى العلامة ويكونان حقيقيين وتخيليين بحسب كون m موجبا أو سالبا

(٦٩) ولتطبق القاعدة المتقدمة على مثالين مخصوصين فنقول
المثال الاول ان يفرض أن المطلوب حل هذه المعادلة

•(٩٣)•

$$\frac{x^2}{8-x} = \frac{x+2}{x}$$

فبذف المقامات يحدث $x^2 + 8 - x = 8 - x^2 - 16 = 16 - x^2$
ثم تحول الكميات المعالومة الى الطرف الثاني واجهولة الى الاول وتختصر
الحدود المتشابهة فيحدث

$$x^2 = 16 \text{ أو } x = \pm \sqrt{16} = \pm 4$$

فاذا فرضنا بالحرفين x و y جذري المعادلة يكون

$$x = 4 \text{ و } y = -4$$

المثال الثاني أن يفرض ان المطلوب حل المعادلة $\frac{x^2}{8-x} = \frac{x+2}{x}$ $x \neq 0$
فباجراء العمل كما تقدم في المثال الاول يحدث

$$x^2 - 8 = x^2 + 8 - x \text{ أو } x = 16$$

$$x = 16 \text{ أو } x = -16$$

$$x = \pm \sqrt{16} = \pm 4$$

أي أن جذري المعادلة يكونان تخيليين

•(في المعادلة التامة ذات الدرجة الثانية)•

(٧٠) كل معادلة تامة بدرجة ثانية يمكن ايلوتها الى هذه الصورة

$x^2 + 2px + q = 0$ التي فيها رموز p و q و h تدل
على كميات موجبة كانت أو سالبة فاذا قسم كل من طرفي هذه المعادلة على

$$x^2 + 2px + q = 0$$

$$\text{واذا فرضنا أن } \frac{q}{x^2} = c \text{ و } \frac{2p}{x} = n \text{ يحدث}$$

$$1 + c + n = 0$$

•(٩٤)•

ولحل هذه المعادلة يلاحظ انه اذا كانت المعادلة المذكورة بهذه الصورة

$$م^2 + ٢ م + ٢ = ٢ + م = ٢$$
 أى أن طرفها الاول مربع كامل للكمية
 ذات الحدين $م + ١$ يمكن تحويلها الى معادلة بدرجة اولى بان يؤخذ
 الجذر التربيعي لكل من طرفيها فيقتضى سهل حلها

وتحويل المعادلة $م^2 + ٢ م + ٢ = ٢$ الى الصورة المتقدمة
 يحول ٢ الى الطرف الثانى فتؤول الى $م^2 + ٢ م = ٠$ الى الصورة المتقدمة
 ثم يعتبر $م^2 + ٢ م$ مربع حدين لمربع $م$ ككمية ذات حدين
 فيكون $م$ مربع الحد الاول لها و $٢ م$ ضعف حاصل
 ضرب الحد الاول فى الثانى فيكون الثانى مساويا $\frac{٢ م}{٢ م} = ١$ فاذا ضم
 الى طرفي المعادلة $م^2 + ٢ م + ١ = ١$ ١ مربع الحد $\frac{٢ م}{٢ م}$ يحدث
 المعادلة

$$م^2 + ٢ م + ١ = ١ \Rightarrow (م + ١)^2 = ١$$

ألقى طرفها الاول مربع كامل ومساو لمربع الكمية ذات الحدين $م + ١$
 فاذا استخرج جذرا طرفيها يحدث

$$م + ١ = \pm ١ \Rightarrow م = ٠ \text{ ومنها يحدث}$$

$$م = -١ \Rightarrow م + ١ = ٠$$

وينتج من هذا القانون الاخير ان للجهول $م$ مقدارين فاذا ارمز لهما
 بالرمزين $م$ و $م'$ يحدث

$$م = ٠ \text{ و } م' = -١$$

وينتج ايضا من القانون المتقدم انه متى حوت المعادلة الثامنة ذات الدرجة

•(٩٥)•

الثانية الى اخرى بهذه الصورة

$$س^٢ + ح س + ل = ٠$$

يكون مقدار الجذور مساويا لنصف مكرر الحد الثاني بعلامة مخالفة لعلامته زائدا أو ناقصا جذر مربع حاصل الجمع الناتج من ضم مربع نصف مكرر الحد الثاني الى الحد المعلوم بعلامة مخالفة لعلامته

•(تنبيه)•

قد وضع في اخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة

$$س^٢ + ح س + ل = ٠ \quad \text{ك} \quad \text{امام الجذر التربيعي للطرف الثاني}$$

العلامة المضاعفة \pm مع انه ينبغي وضعها امام جذر الطرف الاول ايضا

لان $س^٢ + ح س + ل = ٠$ مربع الكمية ذات الحدين $س + \frac{ح}{٢}$ ايضا
 لكن اذا وضعت العلامة $-$ امام جذر الطرف الاول فالجذران
 الناتجان للجهول $س$ يصيران بعد تغيير العلامة عين الجذرين الحادتين
 من حين وضع علامة $+$ فاذن يكتفى بوضع العلامة المضاعفة \pm امام
 الجذر التربيعي للطرف الثاني فقط

•(تجربيات على حل المعادلات)•

$$(٧١) \quad \text{اذا اريد حل المعادلة الرقمية التي هي} \quad \frac{س^٢}{١} - \frac{س}{٢} + \frac{٢}{١} = ٠$$

$$٨ - \frac{س}{٢} - \frac{س^٢}{١٢} = ٠ \quad \text{تحويل اول هذه المعادلة الى اخرى}$$

بهذه الصورة $س^٢ + ح س + ل = ٠$ ويتوصل الى ذلك بحذف المقامات فيحدث بعد حذفها من المعادلة المذكورة

$$١٠ س^٢ - ٦ س + ٩ = ٠ \quad ٩٦ - ٨ س - ١٢ س^٢ + ٢٧٣ = ٠$$

وتحويل جميع حدود هذه المعادلة الى الطرف الاول تؤل الى

•(٩٦)•

$$٢٢ \sqrt{٢٦٠} + ٢٢ = ٣٦٠ \quad \text{أو} \quad \sqrt{٢٦٠} + ٢٢ = ٣٦٠$$

ويعتبر القانون

$$\sqrt{٢٦٠} + ٢٢ = ٣٦٠$$

$$\sqrt{٢٦٠} + \left(\frac{١}{٢٢}\right) = ٣٦٠$$

ويمكن حل المعادلة المذكورة $\sqrt{٢٦٠} + ٢٢ = ٣٦٠$ من اول الامر بان
يحول $\sqrt{٢٦٠}$ الى الطرف الاخر ويضم لكل من طرفيها $\left(\frac{١}{٢٢}\right)$ وهو
سابع نصف مكررا مجهول $\sqrt{٢٦٠}$ فيحدث

$$\sqrt{٢٦٠} + \frac{١}{٢٢} = \left(\frac{١}{٢٢}\right) + ٣٦٠$$

ثم بأخذ الجذر التربيعي لكل من طرفيها يحدث

$$\sqrt{٢٦٠ + \frac{١}{٢٢}} = \sqrt{\frac{١}{٢٢} + ٣٦٠}$$

$$\sqrt{٢٦٠ + \frac{١}{٢٢}} = \sqrt{\frac{١}{٢٢} + ٣٦٠}$$

وهو ناتج عين الناتج المتقدم من تطبيق المعادلة المذكورة على القانون العام
فلم يبق حينئذ الا اجراء العمليات الحسابية اى تحويل الكسور الى مخرج واحد
تحت علامة الجذر الى ذات مقام واحد بان يضرب حد الكسر $\frac{١}{٢٢}$ في
٢٢ ثم يضم الكسر الموجودان تحت العلامة المذكورة الى بعضهما

$$\sqrt{\frac{١ + ٢٢ \times ٢٦٠}{٢٢}} = \sqrt{\frac{١}{٢٢} + ٣٦٠}$$

فاذا اجريت عملية حساب $٢٢ \times ٢٦٠ + ١$ واخرج العدد (٢٢)
من تحت علامة الجذر ولو حظ أن العدد ٢٢ هو المقام المشترك يحدث

$$\sqrt{\frac{٧٩٢١}{٢٢}} = \sqrt{\frac{١}{٢٢} + ٣٦٠}$$

وحيث أن الجذر التربيعي للعدد ٧٩٢١ هو ٨٩ يكون

==

س = $\frac{89 \pm 1}{22}$ وإذا وضع كل من جذري المجهول س على
عدته يحدث

$$\begin{aligned} \text{س} &= \frac{88}{22} = \frac{89+1}{22} = 4 \quad \text{و} \\ \text{س} &= \frac{90}{22} = \frac{91}{22} = \frac{89-1}{22} = 4 \end{aligned}$$

•(في المناقشات العمومية للمعادلات ذات الدرجة الثانية)•

(٧٢) قد تقدم في حل معادلة تامة ذات درجة ثانية أن كل معادلة من هذا
القبيل لها جذران وبرهان ذلك أيضا أن يقال كل معادلة تامة ذات درجة ثانية
كالمعادلة $\text{س}^2 + \text{ع س} + \text{ك} = 0$ يمكن وضعها بهذه الصورة
 $\text{س}^2 + \text{ع س} + \text{س} = \frac{\text{ع}^2}{4} - \frac{\text{ع}^2}{4} + \frac{\text{ع}^2}{4} = \frac{\text{ع}^2}{4} - \text{ك}$ بتحويل الحد المعلوم ك إلى
الطرف الثاني وإضافة $\frac{\text{ع}^2}{4}$ إلى كل من الطرفين فإذا لوحظ أن الطرف
الأول $\text{س}^2 + \text{ع س} + \text{س} = \left(\text{س} + \frac{\text{ع}}{2}\right)^2 - \frac{\text{ع}^2}{4}$ وان الطرف الثاني
 $\frac{\text{ع}^2}{4} - \text{ك}$ مساو $\left(\frac{\text{ع}}{2} - \text{ك}\right)^2$ ووضع هذان المقداران في المعادلة
المتقدمة وحول ما كان في الطرف الثاني إلى الأول حدث

$$\left(\text{س} + \frac{\text{ع}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\text{ع}}{2} - \text{ك}\right)^2 = 0$$

وحيث أن الطرف الأول مساو لفاضل مربعين يكون مساويا لحاصل ضرب
مجموع جذريهما في فاضلهما أي مساويا

$$0 = \left(\text{س} + \frac{\text{ع}}{2} + \frac{\text{ع}}{2} - \text{ك}\right) \left(\text{س} + \frac{\text{ع}}{2} - \frac{\text{ع}}{2} + \text{ك}\right)$$

فحيث أن الطرف الأول الذي هو حاصل ضرب مساو لضرب الثاني أي الضرب
يلزم أن يكون أحد مضروبيه مساويا لصفر وحيث أنه محتو على مضروبين
تكون المعادلة متصفة بفرض كليهما مساويا لصفر أي

•(٩٨)•

$$\begin{aligned} \text{س} + \frac{\text{ع}}{\text{ف}} + \sqrt{\frac{\text{ك}}{\text{ف}} - \frac{\text{ع}^2}{\text{ف}^2}} &= ١٠ \\ \text{س} + \frac{\text{ع}}{\text{ف}} - \sqrt{\frac{\text{ك}}{\text{ف}} - \frac{\text{ع}^2}{\text{ف}^2}} &= ١٠ \end{aligned}$$

ويستخرج من ذلك مقدار المجهول س وهما عينتا المقدارين المعلومين سابقا وبهذا يثبت ان كل معادلة تأمة بدرجة ثانية لها جذران فقط

•(نتيجه)•

ينتج من مقارنة المعادلة

$$٠ = \left(\text{س} + \frac{\text{ع}}{\text{ف}} + \sqrt{\frac{\text{ك}}{\text{ف}} - \frac{\text{ع}^2}{\text{ف}^2}} \right) \left(\text{س} + \frac{\text{ع}}{\text{ف}} - \sqrt{\frac{\text{ك}}{\text{ف}} - \frac{\text{ع}^2}{\text{ف}^2}} \right)$$

يجزى المجهول س أن الطرف الاول من معادلة ذات درجة ثانية بهذه

الصورة $\text{س}^2 + \text{ع س} + \text{ك} = ٠$ يكون مركبا من حاصل ضرب كيتين كتابهما ذات حدين ومحتوية على المجهول س بدرجة اولي خالذان الأولان منهما يكونان س والاخيران منهما يكونان جذري س مأخوذين بعلامتين متخالفتين

وينتج من هذه الخاصية طريقة تركيب معادلة ذات درجة ثانية بعدمعرفة جذريها هي انه لتركيب معادلة بدرجة ثانية بعدمعرفة جذريها ٢ و ٥ يجعل حاصل ضرب الكيتين ذاتي الحدين س - ٢ و س + ٥

ساويا لصفر فيحدث $\text{س}^2 + ٣ س - ١٠ = ٠$ وهي المعادلة المطلوبة فاذا حلت هذه المعادلة تحصل عدد ٢ و ٥ وهما جذراها

(٧٣) حيث أن كل جذري معادلة عامة بدرجة ثانية على هذه الصورة

$$\begin{aligned} \text{س} &= -\frac{\text{ع}}{\text{ف}} + \sqrt{\frac{\text{ك}}{\text{ف}} - \frac{\text{ع}^2}{\text{ف}^2}} \text{ و } \text{س} = -\frac{\text{ع}}{\text{ف}} - \sqrt{\frac{\text{ك}}{\text{ف}} - \frac{\text{ع}^2}{\text{ف}^2}} \\ &\text{يحدث بجمعهم ما على بعضهما} \end{aligned}$$

• $س + س = س = \frac{س}{٢} = \frac{س}{٢} = س$.
 أعني أن حاصل جمع جذري معادلة بدرجة ثانية مساوية ~~لجذر~~ الجذر الثاني
 بعلامة مخالفة لعلامته

• وإذا ضرب الجذران المذكوران في بعضهما يحدث

$$س + س = س = \left(\sqrt{\frac{س}{٢}} + \sqrt{\frac{س}{٢}} \right) \left(\sqrt{\frac{س}{٢}} - \sqrt{\frac{س}{٢}} \right) = \left(\frac{س}{٢} - \frac{س}{٢} \right) = ٠$$

• أعني أن حاصل ضرب جذري معادلة بدرجة ثانية يساوي صدها المعلوم
 بعلامة مخالفة لعلامته إن كان في الطرف الثاني أو بعلامة إن كان
 في الطرف الأول

• (نبيه) •

ينتج من هاتين النماذجين طريقة تركيب معادلة بعد معرفة جذريها
 فإذا فرض مثلاً أن المطلوب تحصيل معادلة ذات درجة ثانية جذراها
 ٢ و ٥ كان حاصل جمع الجذرين المذكورين المأخوذ بعلامة مخالفة
 لعلامته مساوياً ٣ وحاصل ضربهما مساوياً ١٠ وتكون المعادلة

$$المطلوبة س + س = ٣ - س = ١٠ = ٠$$

$$(٧٤) \text{ جذر المجهول } س \text{ المساويان } \pm \sqrt{\frac{س}{٢}} \text{ والاحتوائان } \sqrt{\frac{س}{٢}}$$

على علامة الجذر يكونان تخيلين متى كانت الكمية $\frac{س}{٢}$ - في الموضوعة
 تحت علامة الجذر سلبية وحيث أن $\frac{س}{٢}$ مربع كامل تكون علامته موجبة
 دائماً علامة $\frac{س}{٢}$ - لا تتغير حينئذ لا بعلامة لا من معادلة

$$س + س = س + س = ٠ \text{ ويقتضى } س = ٠$$

فإذا كان k أصغر من صفر أو سالباً يكون $-k$ موجباً ويكون

أيضاً $\frac{f}{k}$ موجباً ويكون الجذران حقيقيين غير متساويين وإذا كان k مساوياً للصفر آلت الكمية الموضوعة تحت علامة الجذر إلى

$\frac{f}{k}$ وكان الجذران حينئذ حقيقيين وإذا كان k سالباً وتكون الكمية التي تحت

علامة الجذر $\frac{f}{k}$ مركبة من كمية موجبة و كمية سالبة فعلاصة

الجذر تتعلق بالمقادير المنسوبة لها تين الكميتين فإذا كان k أصغر من $\frac{f}{k}$ كانت الكمية ذات الحدين $\frac{f}{k}$ موجبة والجذران حقيقيين غير متساويين

وإذا كان $k = \frac{f}{k}$ كانت الكمية ذات الحدين التي تحت علامة الجذر مساوية للصفر والجذران حينئذ حقيقيين ومتساويين وإذا كان k أكبر من

$\frac{f}{k}$ كانت الكمية ذات الحدين $\frac{f}{k}$ سالبة والجذران تخيلين وهالك جدول لتأجيل هذه المناقشة

يكون الجذران حقيقيين وغير متساويين	$k > \frac{f}{k}$	إذا كان
يكون الجذران حقيقيين وغير متساويين	$k = \frac{f}{k}$	
يكون الجذران حقيقيين وغير متساويين	$k < \frac{f}{k}$	
يكون الجذران تخيلين	$k < \frac{f}{k}$	

(٧٥) يمكن من أول الأمر إدراك علامتي جذري معادلة بهذه الصورة

$ax^2 + bx + c = 0$ وذلك مؤسس على الخاصيتين

ثم

$\text{م} = \text{ك} + \text{و} = \text{م} + \text{م} = \text{ع}$. وبيان ذلك أن يقال
 أولا إذا كان ك أصغر من صفرا وسالبا تكون علامتا الجذرين متضالفتين
 لأن حاصل ضربيهما سالب وعلامة الأكبر مخالفة لعلامة ع حيث كان
 حاصل جمعهما مساويا ع

وثانيا إذا كان ك مساويا لصفر يكون أحد الجذرين مساويا لصفر لأن
 حاصل ضربيهما عدم ويكون الآخر مساويا المكرر ع بعلامة مخالفة لعلامته
 وثالثا إذا كان ك أكبر من صفرا وموجبا يكون للجذرين علامة واحدة
 حيث كان حاصل ضربيهما موجبا وتكون علامتا ههما مخالفة أيضا لعلامة
 ع ويمكن استنتاج ذلك من المقدارين

$$\text{م} = \text{ع} + \left| \text{ك} - \frac{\text{ع}}{2} \right| \quad \text{و} \quad \text{م} = \text{ع} - \left| \text{ك} - \frac{\text{ع}}{2} \right|$$

وهالك جد ولا يصحوى على النتائج الخادنة من المناقشة المتقدمة

ك تكون علامتا الجذرين ع . كان الأكبر موجبا
 متضالفتين لكن ان كان ع . كان الأكبر سالبا
 إذا كان ك . يكون أحد الجذرين صفرا والآخر مساويا ع
 ك . تكون علامتا الجذرين ع . يكون الجذران موجبين
 متضالفتين لكن ان كان ع . يكون الجذران سالبين

(٧٦) لم يبق علينا إلا ان نتحقق بعض حالات خاصة فنقول
 أولا قد شوهد فيما تقدم في الحالة التي كان فيها ك أكبر من صفرا ومساويا
 ع أن الجذرين متساويان وذلك بمقتضى قانون

$$\text{م} = \text{ع} + \left| \text{ك} - \frac{\text{ع}}{2} \right| \quad \text{لكن يمكن تبرهنه على ذلك من قول الامر}$$

بان يوضع في المعادلة $\text{م} + \text{ع} = \text{م} + \text{ع} = 0$. بين ك مقداره

مضروب $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$ وهي معادلة يمكن وضعها بهذه الصورة $(x + \frac{1}{2})^2 = 0$ ومنها يحدث

$$x = -\frac{1}{2}$$

وهي معادلة تصحق بالفرضين $x = -\frac{1}{2}$ و $x = \frac{1}{2}$ والمتطابقين ومنها يستخرج الجذران $x = -\frac{1}{2}$ و $x = \frac{1}{2}$ المتساويان

وثانيا قد شوهد فيما تقدم في الحالة التي كان فيها $x = 0$ أن أحد الجذرين مساو صفر والاخر مساو $-x$ ويمكن حدوث ذلك من القانون

$$x^2 \pm x - \frac{1}{4} = 0 \text{ او من الارتباطين}$$

$x^2 = 0$ و $x^2 + x = 0$ لكن يمكن استنتاج ذلك

من اول الامر من المعادلة $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$ لانها اذا فرض

فيها $x = 0$ تول الى $x^2 + x = 0$ واذا وضع فيها $x = -\frac{1}{2}$

مضروباً مشتركاً آلت الى $x(x + \frac{1}{2}) = 0$ وهي معادلة تصحق

بالفرضين $x = 0$ و $x = -\frac{1}{2}$ والذين يستخرج منهما

$$x = 0 \text{ و } x = -\frac{1}{2}$$

وثالثاً اذا فرض $x = 0$ في القانون $x^2 \pm x - \frac{1}{4} = 0$ كـ

آل الى $x^2 \pm x = 0$ اعني أن جذري المجهول x يكونان

متساويين ومختلفين في العلامة لكن يمكن استنتاج ذلك من المعادلة

$x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$ التي تول في هذه الحالة الى معادلة غير تامة

بهذه الصورة

$$x^2 + x = 0 \text{ ومنها يستخرج } x = 0 \text{ و } x = -1$$

ورابعاً

.. * (١٠٣) *

ورابعا اذا فرض أن $ك = ٢$ و $ع = ٢$ في ان واحد في القانون

$$م = ٢ = \frac{ع}{ك} \pm \frac{ع}{ك} \sqrt{ك - \frac{ع}{ك}} \text{ اوفى الارتباطين}$$

$$م = ٢ + م = ٢ = ع و م = ٢ = ٢ اوفى المعادلة$$

$$م = ٢ + ع م = ٢ = ٢ يكون جذرا المجهول م مساويين لصفر$$

(٧٧) ونطبق القواعد العمومية على مناقشة بعض امثلة خصوصية فتقول

المثال الاول اذا فرضت معادلة $٢ م + م = ٢ = ٢$ وقسم طرفاها على مكرر $م$ التالى

$$٢ = \frac{ع}{ك} + \frac{ع}{ك} \sqrt{ك - \frac{ع}{ك}}$$

وحيث ان الحد المعلوم سالب فالجذران يكونان حقيقيين غير متساويين ويتا عليه يكونان متخالفين في العلامة لان حاصل ضربهما يكون سالبا وايضا حيث كان مكررا الحد الثانى موجبا يكون حاصل جمع الجذرين سالبا وبناء عليه يكون اكبرهما سالبا بحيث جذرا هذه المعادلة يكونان حقيقيين غير متساويين ومتخالفين لعلامة واكبرهما سالبا

ولتحقيق ذلك يستخرج مقدارا المجهول $م$ من المعادلة المصاومة فيصوت

$$م = ٢ = \frac{ع}{ك} + \frac{ع}{ك} \sqrt{ك - \frac{ع}{ك}} = \frac{٢٠٧ \pm ١}{٦} = \frac{٢٨ \pm ١}{٦} = \frac{٢}{٦} + \frac{١}{٦} \sqrt{٢ - \frac{١}{٦}}$$

ومنه يستخرج $\frac{٥ \pm ١}{٦} =$

$$م = \frac{٥ \pm ١}{٦} = \frac{٢}{٦} = \frac{٢}{٦} و م = \frac{٥ - ١}{٦} = ١$$

المثال الثاني إذا فرضت معادلة $x^2 - 5x + 1 = 0$

وقسمت حدودها على x آلت الى $x - 5 + \frac{1}{x} = 0$
 وحيث أن الحد المعلوم موجب يلزم بمقارنته بجمع نصف مكرر الحد الثاني
 أعني مربع $\frac{1}{x}$ ومن حيث أن مربع $\frac{1}{x}$ يساوي $\frac{1}{x^2}$ يلزم مقابلة
 كسرى $\frac{1}{x^2}$ و $\frac{1}{x}$ بأن يضرب هذا الكسر $\frac{1}{x}$ في 24 فيقول الى
 $\frac{24}{x^2}$ وحيث أن الكسر $\frac{24}{x^2}$ أصغر من $\frac{1}{x^2}$ أي أن الحد المعلوم أصغر من
 مربع نصف مكرر الحد الثاني يكون جذرا المعادلة حقيقيين غير متساويين
 ومن حيث أن حاصل ضربهما موجب وهو $\frac{1}{x}$ يكونان متعديين في العلامة
 ومن حيث أن حاصل جمعهما وهو $\frac{1}{x}$ موجب أيضا يكونان موجبين فينتز
 يكون الجذران حقيقيين موجبين وغير متساويين لأنه من القانون

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

يحدث

$$x = \frac{5 + \sqrt{21}}{2} = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2} \quad \text{و} \quad x = \frac{5 - \sqrt{21}}{2} = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}$$

المثال الثالث إذا فرضت معادلة $x^2 + 14x + 49 = 0$

لوقورن حدها المعلوم الموجب المساوي 49 بجمع نصف مكرر الحد
 الثاني أي مربع 7 يكون 49 مساويا لهذا المربع فاذن يكون
 الجذران حقيقيين ومتساويين وكل منهما مساويا لنصف مكرر الحد الثاني
 بعلامة مخالفة لعلامته أعني أن كل جذريه يكون مساويا -7 لان

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 196}}{2} = -7$$

المثال الرابع إذا فرضت معادلة $x^2 + 6x + 9 = 0$ وقورن

حدها المعلوم 9 بجمع نصف مكرر الحد الثاني أعني $\frac{9}{4}$ يكون

أكبر من $\frac{1}{2}$ ويكون جذرا المعادلة تضيفين لأن

$$\frac{r - \sqrt{r^2 \pm 2r - 1}}{2} = \frac{r^2 - \sqrt{r^2 \pm 2r - 1}}{2} = \frac{r}{2} \left(\pm \frac{r}{2} - 1 \right) = \frac{(r - \sqrt{r^2 \pm 2r - 1})r}{2}$$

(٧٨) قد تقدم انه يجب حل معادلة كعادلة $r^2 + 2r + 1 = 0$

أن تقسم جميع حدودها على r فيحدث $r + 2 + \frac{1}{r} = 0$

وأن يختصر الحساب بفرض $\frac{1}{r} = x$ و $\frac{1}{r^2} = x^2$ فلو اريد الآن

حل المعادلة المذكورة بدون اجراء هذا القرض حول $\frac{1}{r}$ الى الطرف

الثاني فيحدث $r + 2 + \frac{1}{r} = 0$ ولتقيم مربع الطرف الاول

يضاف لكل من طرفيها مربع نصف $\frac{1}{r}$ فيحدث

$$r + 2 + \frac{1}{r} + \frac{1}{4r^2} = \frac{1}{4r^2} + \frac{1}{r} + 2 + \frac{1}{4r^2}$$

وبأخذ جذر كل من الطرفين يحدث

$$r + 2 + \frac{1}{r} + \frac{1}{4r^2} = \frac{1}{4r^2} + \frac{1}{r} + 2 + \frac{1}{4r^2}$$

$$\frac{r^2 - 1}{2r} = \frac{r^2 - 1}{2r}$$

فاذا رمز الجذري المجهول r بالرمزين x و y يحدث

$$\frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

(٧٩) ولتختبر ما يقول فيه هذه المقولة بأن يفرض فيهما تكرار

مساويا لصفري يحدث بنا عليه

$$x^2 - 1 = x^2 - 1 = 0$$

(٦١) *

أعني أن مقدار x يكون لانهايا ومقدار y الذي بهذه الصورة $\frac{1}{x}$ يدل على أنه غير معين لكن استنتاج هذا المقدار في هذه الحالة حادث من وجود مضروب مشترك لحدى الكسر

$$\frac{y + \frac{1}{x}}{x^2} \quad \text{ولتعيين هذا المضروب يضرب حد الكسر}$$

$$\frac{(y + \frac{1}{x}) \cdot x^2}{x^2 \cdot x^2} = \frac{(y + \frac{1}{x}) \cdot x^2}{x^4} = \frac{(y + \frac{1}{x}) \cdot x^2}{x^4}$$

وحيث أن كلا من حدى هذا الكسر الأخير تبيل القسمة على x^2 يكون هو المضروب المشترك ويحدث بعد حذفه

$$\frac{y + \frac{1}{x}}{x^2} = \frac{y + \frac{1}{x}}{x^2}$$

فإذا فرض الآن $x = 0$ ينتج

$$x = \frac{y + \frac{1}{x}}{x^2} = \frac{y + \frac{1}{x}}{x^2} \text{ أى } x = \frac{y + \frac{1}{x}}{x^2}$$

وأما مقدار x فهو لانهايا لانه يفرض $x = 0$. نول المعادلة

$$x + y + \frac{1}{x} = 0 \text{ الى معادلة ذات درجة أولى } x + y + \frac{1}{x} = 0$$

لا تحقق الا بمقدار واحد وهو $x = -\frac{1}{y}$ وحيث ثبت ان مقدار

x معين ينتج من ذلك أن مقدار x لانهايا

(في مسائل الدرجة الثانية) *

(المسألة الاولى) *

(٨٠) ما هو العدد القاسم ٣٦ بحيث يكون خارج القسمة زائدا

المقسوم عليه مساويا ١٥

قابلا

• (١٥٠٧)

فالجواب ان يفرض ان العدد المجهول منه نخرج خمسة ٢٦ على م
يكون هكذا $\frac{26}{3}$ فاذن تحدث هذه المعادلة $\frac{26}{3} + م = 10$

ومنها يحدث $٢٦ + م = ١٥$ أو $م = ١٥ - ٢٦ = -١١$
ومنها يحدث

$$\frac{٢٦ + ١٥}{3} = \frac{١٢٢ - ٢٢٥}{3} \sqrt{\pm 10} = ٢٦ - \frac{٢١٥}{2} \sqrt{\pm 10} = م$$

فاذن يكون مقدار م هكذا

$$م = \frac{٢٦ + ١٥}{3} = ١٢ \text{ و } م = \frac{٢٦ - ١٥}{3} = ٣$$

فكل من مقدارى م = ١٢ و م = ٣ يحقق منطوق المسئلة

• (المسئلة الثانية) •

(٨١) اذا كان المطاوب تقسيم • الى برمين يكون احدهما وسطا

هندسيا بين • انكلي والجزء الآخر يقال •

لحل ذلك يرمن بالحرف م الجزء • الذى يكون وسطا متناسبا فيكون

الجزء الآخر مساويا • م فاذن يكون

$$م : م :: م : م = م$$

$$م = م = م = م \text{ أو } .$$

$$م + م = م = م$$

$$\frac{٥٧ \pm ٦}{3} = \frac{٢٥ \sqrt{\pm 7}}{3} = ٦ + \frac{7}{2} \sqrt{\pm 7} = م$$

فاذن يكون مقدارا م هكذا

$$\frac{(٥٧ \div 1) \cdot}{3} = \frac{٥٧ \pm 7}{3} = م$$

$$\frac{(٥٧ + 1) \cdot}{3} = \frac{٥٧ \pm 7}{3} = م$$

فمقدار م يلقى بمنطوق المسئلة رأيا مقدار م تغير لا تقي به لانه مقدار

• (٨ : ١) •

سالب فيقطع النظر عنه فينتد يكون المسئلة حل واحد هو

$$\frac{(-1 + \sqrt{5})}{2} = \text{سمة}$$

• (تبيينان) •

الاول مقدار سمة $\frac{(-1 + \sqrt{5})}{2}$ يكون أصم مهما كان .
لان اجراء عملية الحساب على عدد مخصوص لا يوصل الى مقدار صحيح
للمجهول سمة

• الثاني قد استخرج فيما تقدم من المعادلة ذات الدرجة الثانية الجذران

$$\frac{(-1 + \sqrt{5})}{2} = \text{سمة} \quad \text{و} \quad \frac{(-1 - \sqrt{5})}{2} = \text{سمة}$$

الليذان يكون كل منهما محققا للمعادلة غير أن أحدهما يليق بمنطوق المسئلة
المقروضة ويؤخذ من ذلك أن هذه المعادلة كفاية عن مسئلة تكون المسئلة التي
حلت سابقا حالة خصوصية منها ومنطوقها هكذا
المطلوب ايجاد عددين حاصل جمعهما مساو ٥ وأحدهما وسط هندسي
بين الآخر و ٥

فاذا رمزنا بـ سمة لاحد العددين المجهولين الذي هو كفاية عن الوسط
الهندسي يوصل الى هذه المعادلة

$$\text{سمة} + ٥ - \text{سمة} = \frac{٥}{2}$$

التي جذورها السالب يكون موافقا لمنطوق المسئلة بجذورها الموجب

• (المسئلة الثالثة) •

(٨٢) المطلوب كتابة عدد ٣١٧ في جملة تعدادية بحيث تكون ارقامه
٦ و ٣ و ٢

فيفرض أن سمة رمز للاساس المجهول للجملة فالسطة آحاد من الرتبة
الثالثة للعدد المقروض تكافى ٦ سمة والثلاثة آحاد من الرتبة الثانية
تكافى ٣ سمة فالعدد المعلوم يكافى

يفرض أن * وتمثل للعدد الذي يراد تقسيمه و m ومن الحاصل ضربيه
 برتيه فيكون العددان المجهولان معينين يجذرى المعادلة

$$m^2 - m = m + m = 0$$

التي يستخرج منها $m^2 = \frac{m}{2} + \frac{m}{2}$ و $m^2 = \frac{m}{2} - \frac{m}{2}$

فإذا كان $m < \frac{m}{2}$ كان هذان المقدران تخيليين فينتد تكون المسئلة غير
 ممكنة الحل

وإذا كان $m = \frac{m}{2}$ كان هذان الجذران حقيقيين وكل منهما مساويا $\frac{m}{2}$
 أعني أن هذ m يكون مقسوما في هذه الحالة قسمين متساويين

وإذا كان $m > \frac{m}{2}$ كان هذان المقداران حقيقيين غير متساويين ويصغر

الفرق بينهما المساوي $\frac{m}{2}$ كلما كبر مقدار m وينتج من ذلك
 نتائج هي

انه متى قسم العدد الى قسمين مختلفين وضربا في بعضهما كان حاصل الضرب
 اكبر من العدد المذكور حين يكون الفرق بين الجذريين المختلفين قليلا ويكون
 هذا الحاصل اكبر ما يكون متى كان الجذران المختلفان متساويين اعني متى
 انقسم العدد المذكور الى قسمين متساويين

• (المسئلة الخامسة) •

(٨٤) ضوآن موضوعان أحدهما في النقطة a والاخر في b
 وموز للبعد ab الكائن بينهما بالحرف ab ولشدة الضوء a بالحرف
 m ولشدة الاخر الكائن في b بالحرف n والمعاوب تعيين النقطة
 الكائن على المستقيم ab التي فيها نور الضوئين واحد وحيث فرضنا
 m و n ومزمن لشدة الضوئين بالنسبة لوحدة البعد تذكر ايضا قاعدة
 معلومة هي أن شدة ضوء واحد واقع في نقطتين على ابعاد غير متساوية

تكونان

تكونان مناسبتين لعكس مربعي يعلى هاتين النقطتين عن هذا الضوء

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}$$

علل ذلك بفرض أن * النقطة المطلوبة ثم يرمز بالحرف r للبعد o فيجبكون $r =$ مساويا $r' =$ وحيث أن m شدة الضوء \propto بالنسبة لوحد البعد تكون $\frac{1}{r} =$ الشدة في النقطة * بالنسبة للبعد r ومثل ذلك يقال في شدة الضوء r في * العكس كائنة على بعد مساو $r =$ r' r'' تكون $\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}$ وحيث لم أن تكون * مستنيرة بنور واحد من الضوئين المذكورين يكون

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}$$

فاذا حل مربع الكمية ذات الحدين $r =$ r' r'' وسلكت الطريقة العنصرية لحل المعادلات تحصل

$$r^2 = r^2 + r^2 + r^2 = 3r^2$$

$$(r - r')^2 = r^2 + r^2 + r^2 = 3r^2$$

$$r^2 = r^2 + r^2 + r^2 = 3r^2$$

$$\frac{r^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} + \frac{r^2}{r^2} + \frac{r^2}{r^2} = 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{r^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} \\ \frac{r^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} \end{array} \right. \dots (٥)$$

وبذلك حل المعادلة $\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}$ بطريقة أخرى من السابقة بأن

• (٢٢) •

يستخرج من اول الامر جذري طرفيها فيجدث

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2\gamma} \pm \sqrt{2\gamma}}{\sqrt{2\gamma}} &= \frac{\sqrt{2\gamma}}{\sqrt{2\gamma}} \\ \sqrt{2\gamma} - \sqrt{2\gamma} &= \sqrt{2\gamma} \pm \sqrt{2\gamma} \text{ أو } \\ (\sqrt{2\gamma} \pm \sqrt{2\gamma}) &= \sqrt{2\gamma} \text{ أو } \\ \frac{\sqrt{2\gamma}}{\sqrt{2\gamma} \pm \sqrt{2\gamma}} &= \sqrt{2\gamma} \end{aligned}$$

فاذا استخرج منها مقدارا $\sqrt{2\gamma}$ يكونان بهذه الكيفية

$$(٢) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\sqrt{2\gamma}}{\sqrt{2\gamma} + \sqrt{2\gamma}} &= \sqrt{2\gamma} \\ \frac{\sqrt{2\gamma}}{\sqrt{2\gamma} - \sqrt{2\gamma}} &= \sqrt{2\gamma} \end{aligned} \right.$$

ويسهل حساب البعد $\sqrt{2\gamma}$ أعني $\sqrt{2\gamma}$ بان يقال

$$\sqrt{2\gamma} = \frac{\sqrt{2\gamma} \pm \sqrt{2\gamma}}{\sqrt{2\gamma} \pm \sqrt{2\gamma}} = \frac{\sqrt{2\gamma} \pm \sqrt{2\gamma}}{\sqrt{2\gamma} \pm \sqrt{2\gamma}}$$

ولتعيين مقداري $\sqrt{2\gamma}$ تؤخذ علامتان العلويتان أو السفلتان فاذن يكون

$$\sqrt{2\gamma} = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\sqrt{2\gamma} + \sqrt{2\gamma}} \text{ و } \sqrt{2\gamma} = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\sqrt{2\gamma} - \sqrt{2\gamma}}$$

وتكون جلتا مقداري مجهول $\sqrt{2\gamma}$ و $\sqrt{2\gamma}$ هكذا

$$\begin{aligned} \sqrt{2\gamma} &= \frac{\sqrt{2\gamma}}{\sqrt{2\gamma} + \sqrt{2\gamma}} \text{ و } \sqrt{2\gamma} = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\sqrt{2\gamma} - \sqrt{2\gamma}} \\ \sqrt{2\gamma} &= \frac{\sqrt{2\gamma}}{\sqrt{2\gamma} + \sqrt{2\gamma}} \text{ و } \sqrt{2\gamma} = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\sqrt{2\gamma} - \sqrt{2\gamma}} \end{aligned}$$

• (تنبية) •

صورة مقداري $\sqrt{2\gamma}$ و $\sqrt{2\gamma}$ المميزين بمعادلتى (٢) ليست كمصورة
مقداري (١) الحادتين من الحل الاول ومع ذلك فهذان المقداران عينا

الاولين

الاولين وبرهان ذلك ان يغير في بسط $\frac{(5\sqrt{2} + 4)}{5 - 2} =$ المقدار $\sqrt{2}$
 بالمقدار $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ ثم يوضع $\sqrt{2}$ مضروباً بمشترب كما في قول الى
 $\frac{(5\sqrt{2} + 2\sqrt{2})}{5 - 2} =$

فاذا اعتبر مقداراً $\sqrt{2}$ و 5 مربعي مقداري $\sqrt{2}$ و 5 يكون مقام
 مكوناً من فاضل معين قاذن يكون

$$\frac{\sqrt{2}}{5 - 2} = \frac{(5\sqrt{2} + 2\sqrt{2})}{(5 - 2)(5 + 2)} =$$

وهو مقدار مساو لمقدار $\sqrt{2}$ المستخرج بالحل الثاني ومثل هذا يقال
 في اثبات تساوي المقدارين الآخرين
 • (مناقشات) •

الاولى اذا فرض ان $\sqrt{2} < 5$ يكون مقدار $\frac{\sqrt{2}}{5 - 2} =$
 موجبا واكبر من $\frac{1}{3}$ لان المقام $5 - 2 = 3$ اصغر من $\sqrt{2}$
 لان $\sqrt{2} < 5$ قاذن يكون الكسر $\frac{\sqrt{2}}{5 - 2}$ اكبر من انكسر
 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ او من $\frac{1}{3}$ ويكون مقدار $\frac{\sqrt{2}}{5 - 2} =$ المطابق لمقدار $\sqrt{2}$
 موجبا ايضا غير انه اصغر من $\frac{1}{3}$ قاذن توجد نقطة كنقطة $\frac{1}{3}$ مستقيمة
 بين واحد من الضولين 1 و 5 وتكون اقرب الى 5 من 1 وهذا
 يوافق فرض $\sqrt{2} < 5$

ومقدار $\frac{\sqrt{2}}{5 - 2} =$ يكون موجبا ايضا حيث ان $\sqrt{2} < 5$
 ويكون اكبر من $\frac{1}{3}$ لان المقام $5 - 2 = 3$ اصغر من $\sqrt{2}$ قاذن
 يكون الكسر $\frac{\sqrt{2}}{5 - 2}$ اكبر من $\frac{\sqrt{2}}{3}$ او من $\frac{1}{3}$ ومقدار

و - م = $\frac{2\gamma - 3\gamma}{2\gamma - 3\gamma}$ المطابق للاول يكون سالبا لان بسطه سالب

ومقامه موجب أو يقال حيث أن م أكبر من د يكون د - م = م -

بالضرورة سالبا فاذن يوجد على المستقيم أ - نقطة ثانية ح مستقيمة

بنور واحد من الضوئين المقروضين وتكون على عين النقطة - لان بعدها

عن أ أكبر من د وهذا الناتج يوافق أيضا م < هـ

الثانية اذا فرض أن م > هـ يكون مقدار م - $\frac{2\gamma - 3\gamma}{2\gamma + 3\gamma}$

موجبا غيراته بواسطة برهان كالتقدم في الحالة السابقة يبرهن على أن م -

يكون أصغر من $\frac{2\gamma}{2\gamma + 3\gamma}$ وان المقدار المطابق له وهو د - م = $\frac{2\gamma}{2\gamma + 3\gamma}$

موجبا واكبر من $\frac{2\gamma}{2\gamma + 3\gamma}$ فاذن تكون النقطة الاولى مستقيمة بنور واحد من

الضوئين الموضوعين في النقطتين أ و - واقرب إلى النقطة أ من

- وهذا يوافق فرض م > هـ

$$\frac{2\gamma}{2\gamma + 3\gamma}$$

والمقدار الثاني وهو م = $\frac{2\gamma - 3\gamma}{2\gamma - 3\gamma}$ يكون سالبا لان بسطه

موجب ومقامه سالب وتوضح هذا المقدار كما في النوع الثاني من (بند

٤٧) يغير في المعادلة

$$\frac{2\gamma}{2\gamma - 3\gamma} = \frac{2\gamma}{2\gamma - 3\gamma} \text{ علامة م فتؤول الى } \frac{2\gamma}{2\gamma - 3\gamma} = \frac{2\gamma}{2\gamma - 3\gamma} \text{ لانه}$$

بالعنونة عن هذه المعادلة يتوصل الى منطوق المسئلة المقروضة بدون تغيير

غير ان هذه المعادلة تعلم منها ان النقطة المستقيمة بنور واحد من الضوئين يكون

بعدها عن النقطة - أكبر من د فينته تكون النقطة الثانية ح

المستقيمة بنور واحد من الضوئين على يسار النقطة ١ وبمسارها عنها ميئاً

بمقدار سالب هو $m = \frac{\sqrt{2}}{2\gamma - \gamma}$ لأن جذري المعادلة المقبرة عين

جذري المعادلة المقروضة وأما المقدار المطابق لمقدار $m = \frac{\sqrt{2}}{2\gamma - \gamma}$ وهو

$$m = \frac{\sqrt{2}}{2\gamma - \gamma} \text{ فيمكن وضعه بهذه الصورة}$$

$$m = \frac{\sqrt{2}}{2\gamma - \gamma}$$

وحيث نسهل البرهنة على أنه موجب واكبر من ١ وهذا الناتج يوافق

وضع النقطة m المعين سابقاً وفرض $m > 1$

الثالثة إذا فرض أن $m = 1$ كان مقدارا

$$m = \frac{\sqrt{2}}{2\gamma + \gamma} \text{ و } m = \frac{\sqrt{2}}{2\gamma + \gamma} \text{ موجبين}$$

ومساوي كل منهما $\frac{1}{2}$ وكانت النقطة الأولى المستقيمة بنور واحد من

الضوئين على بعدين متساويين من النقطتين ١ و ٢ وهذا الناتج يوافق

فرض $m = 1$

وأما المقداران الآخران اللذان هما

$$m = \frac{\sqrt{2}}{2\gamma - \gamma} \text{ و } m = \frac{\sqrt{2}}{2\gamma - \gamma} \text{ فيؤان الى}$$

$$m = \frac{\sqrt{2}}{2\gamma - \gamma} \text{ و } m = \frac{\sqrt{2}}{2\gamma - \gamma} \text{ وهما مقداران}$$

لانهما

(انظر المناقشة الثالثة من بند ٤٥) وحيث تكون نقطة المستقيمة بنور

واحد من الضوئين على بعد لاها ف من نقطتين ١ و ٢ اعني لا وجود لها

لان فرض $m = 1$ لا يبيح نقطة اخرى مستقيمة بنور واحد على المستقيم

١- لا على بين نقطة - ولا على شمال نقطة ١
الرابعة اذا فرض ان $m = 2$ و $n = 1$ في آن واحد المقدار

$$m = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \quad n = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

فالحل الاول للمسئلة هو النقطة التي وضع فيها الضوآن واما المقداران
الآتزان اللذان هما

$$m = \frac{2}{2-1} = 2 \quad n = \frac{1}{2-1} = 1$$

فيؤلان الى n اعني انهما غير معينين وحيث ان تكون جميع نقط المستقيم
١- المار بالنقطة الموضوعة فيها الضوآن مستقيمة بشو واحد من الضوئين
وهذا الناتج موافق لما فرضناه من ان الضوئين في نقطة واحدة وان
شدتهما واحدة

(في المعادلات التي يمكن حلها بواسطة المعادلات ذات الدرجة الثانية)
(٨٥) فصل المعادلات ذات الدرجة الثالثة الخالية من الحد المعلوم
بواسطة المعادلات ذات الدرجة الثانية فحل المعادلة العمومية

$$x^3 + px + q = 0$$

بوضع $x = y + z$ مضروباً مشتركاً فيها فتؤول الى المعادلة

$$y^3 + z^3 + p(y+z) + q = 0$$

وحيث أن طرفها الاول المحتوي على حاصل ضرب مضروبين مساو للطرف
الثاني اي الصفر يكفي لتحقيقها فرض احد المضروبين مساوياً للصفر وحيث
تكون المعادلة ممتحنة بفرض $x = 0$ او

$$x^3 + px + q = 0 \quad \text{الذي يحدث منه}$$

$$y^3 + z^3 + p(y+z) + q = 0 \quad \text{و} \quad y = -z$$

وبالاجابة

وبالمثل فيكون المجهول x ثلاثة مقادير هي

$$x = \frac{1}{4} + \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right] \text{ و } x = \frac{1}{4} - \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right] \text{ و } x = \frac{1}{4}$$

ويمكن حل المعادلة $x^2 + x + 1 = 0$ ذات الدرجة الرابعة غير المحتوية على الحد المعلوم والحد المجهول بدرجة أولى بحل تعبير المتقدم

(٨٦) المعادلة المضاعفة التربع معادلة لا تحتوي الا على الجاهيل بدرجات مزدوجة وتحصل المعادلة المضاعفة التربع ذات الدرجة الرابعة بواسطة حل المعادلة ذات الدرجة الثانية فحل المعادلة العددية

$$x^2 + x + 1 = 0$$

يجعل $x = y$ ومنه يستخرج $y = \pm \sqrt{-x-1}$ ثم يوضع في المعادلة المقروضة بدل x مقداره فتؤول الى

$$y^2 + y + 1 = 0$$

ومن هنا يحدث

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

واذا وضع على التعاقب بدل y مقداره في $x = \pm \sqrt{-y-1}$

$$\text{حدث } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} + \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right] \text{ و } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} - \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right]$$

فاذن يكون المجهول x اربعة مقادير هي

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} + \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right] \text{ و } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} - \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right]$$

• (مذففات) •

(٨٧) قد حولت المعادلة المقروضة الى معادلة بهذه الصورة

$$x^2 + c x + k = 0$$

$$x^2 + c x + k = 0 \quad \text{أو} \quad x^2 + c x + k = 0$$

ويخرج من الارتباط الأخير أن كل مقدار فرض لجهول x يجب أن
مقدارين متساويين ومتضالتي العلامة للجهول x ومن المعلوم أن
جهول x من كل معادلة كمعادلة

$$x^2 + c x + k = 0 \quad \text{أو} \quad x^2 + c x + k = 0$$

هذان يكون لجهول x أربعة مقادير متساوية متضالتي العلامة
حينئذ يقال

كل معادلة مضاعفة التريبع ذات درجة رابعة لها أربعة جذور متساوية
متضالتي العلامة

ولتصبر الأحوال التي فيها هذه الجذور حقيقية أو تخيلية فنقول حيث أن
 $x^2 + c x + k = 0$ ينتج بالبداية أنه إذا كان جذرا x موجبين
تكون جذور جهول x الأربعة حقيقية وإذا كان أحد جذري x
موجبا والاخر سالبا يكون جذران من الأربعة حقيقيين والاخران
تخيليين

وإذا كان جذرا x سالبين تكون جذور x الأربعة تخيلية وإذا
كان جذرا x تخيليين تكون جذور جهول x الأربعة كذلك
وحيث علم مما تقدم كيفية استنتاج مقادير x و k وعلامتهما وفي أي
الأحوال يكون مقدارا x حقيقيين أو تخيليين موجبين أو سالبين
يسهل حينئذ معرفة جذور x هل هي حقيقية أو تخيلية في جميع
الفروضات الممكنة

(روايت جدي لا تحتوي على جميع الاحوال التي يمكن ان يراها) •

اذا كان $\lambda < \frac{1}{2}$ وكان

$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \lambda \end{matrix} \right\}$

يكون μ و ν حدين متساويين وموجبين
و μ و ν حدين مختلفين
مختلفين

..... ويكون منه و منه و منه و منه
مشتقين وسالين

$\left\{ \begin{array}{c} \wedge \\ \vee \end{array} \right.$

وكان

الممكن . >

..... ويكون مضمون هذه الرسالة عجيبة

يكون من صفات المؤمنين ومخالفات الكافرين ويكون

تفصيلی

(٨٨) ولنطبق هذه المباحث العمومية على بعض مسائل خصوصية
نقول

• (المثال الاول) •

إذا فرضت المعادلة $x^3 - 13x^2 + 26x - 12 = 0$ وجعل فيها
 $y = x - 4$ تنزل الى

$$y^3 - 13y^2 + 26y - 12 = 0$$

يفذرا y يكونان حقيقيين غير متساويين ومتحدى الصلابة وموجبين
أما الاول فلان الحد المعلوم موجب واقل من مربع نصف مكرر الحد الثاني
وأما الثاني فلان الحد المعلوم موجب وأما الثالث فلان مكرر الحد الثاني
سالب فاذن تكون جذورا مجهول y الاربعة حقيقية ويتحقق هذا بإجراء
الحساب وذلك بان يستخرج من المعادلة ذات الدرجة الثانية المتقدمة

$$y^2 - 13y + 26 = 0 \Rightarrow y = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 26}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 104}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{65}}{2}$$

وينتج من ذلك

$$x = y + 4 = \frac{13 \pm \sqrt{65}}{2} + 4 = \frac{21 \pm \sqrt{65}}{2}$$

فاذن يكون

$$x_1 = \frac{21 + \sqrt{65}}{2}, x_2 = \frac{21 - \sqrt{65}}{2}, x_3 = 4$$

• (المثال الثاني) •

إذا فرضت المعادلة $x^3 - 13x^2 + 26x - 12 = 0$ وجعل فيها
 $y = x - 4$ تنزل الى

$$y^3 - 13y^2 + 26y - 12 = 0$$

يفذرا هذه المعادلة يكونان حقيقيين غير متساويين ومتحدى الصلابة وسالبيين
أما الاول والثاني فيكونان حقيقيين غير متساويين ومتحدى الصلابة وسالبيين
أما الثالث

• (٢٢) •

فلان ~~مستطرد~~ والحد الثاني موجب فاذن تكون الجذور الأربعة المعادلة
المضاعفة التربيع تخيلية لأن مقداري $\sqrt{2}$ يكونان

$$\sqrt{2} = 1 \text{ و } \sqrt{2} = -1$$

$$\sqrt{2} = 1 \text{ و } \sqrt{2} = -1$$

• (المثال الثالث) •

إذا فرضت المعادلة $\sqrt{2} = 1$ و $\sqrt{2} = -1$. تم جعل فيها
 $\sqrt{2} = 1$ قول إلى

$$\sqrt{2} = 1 \text{ و } \sqrt{2} = -1$$

وحيث أن الحد المعلوم لهذه المعادلة سالب يكون جذرا $\sqrt{2}$ حقيقيين
ومتخالفين في العلامة ويكون اثنان من الجذور الأربعة للمعادلة المضاعفة
التربيع حقيقيين واثنان تخيليين ويتحقق ذلك من البحث عن مقداري
 $\sqrt{2}$ ومقادير $\sqrt{2}$ فيجدت

$$\sqrt{2} = 1 \text{ و } \sqrt{2} = -1$$

وبناء عليه يحدث

$$\sqrt{2} = 1 \text{ و } \sqrt{2} = -1$$

• (المثال الرابع) •

إذا فرضت المعادلة $\sqrt{2} = 1$ و $\sqrt{2} = -1$. ويجعل فيها
 $\sqrt{2} = 1$ وقسمت جميع حدودها على $\sqrt{2}$ قول إلى

$$\sqrt{2} = 1 \text{ و } \sqrt{2} = -1$$

وحيث أن الحد المعلوم لهذه المعادلة موجب واكبر من مربع نصف $\sqrt{2}$ كرد
الحد الثاني يكون جذرا $\sqrt{2}$ تخيليين فاذن تكون جذور $\sqrt{2}$ كذلك

لا يحصل

$$\text{م} = \frac{11 - \gamma + \gamma}{1} \quad \text{و} \quad \text{م} = \frac{11 - \gamma - \gamma}{1} \quad \text{وبناء عليه يحدث}$$

$$\text{م} = \frac{11 - \gamma + \gamma}{1} \pm \quad \text{و} \quad \text{م} = \frac{11 - \gamma - \gamma}{1} \pm$$

(٨٩) لحل معادلتين ذاتي مجهولين ودرجة ثانية يحدف اولا احد المجهولين
 بأحدى الطرق المعلومة المقررة في حل المعادلات ذات الدرجة الاولى كما في
 (بند ٣٦)

فإذا كان المطلوب حل المعادلتين

$$\text{م} = \text{م} + \text{م}$$

$$\text{م} = \text{م} + \text{م}$$

يستخرج من المعادلة الثانية مقدار المجهول م ويوضع في الاولى فيحدث
 على التوالي

$$\text{م} + (\text{م} - \text{م}) = \text{م} \quad \text{أو}$$

$$\text{م} + \text{م} - \text{م} = \text{م} \quad \text{أو}$$

$$\text{م} = \text{م} + \text{م} - \text{م} \quad \text{أو}$$

$$\text{م} = \text{م} + \frac{\text{م} - \text{م}}{1} \quad \text{ومنها يحدث}$$

$$\text{م} = \frac{11 - \gamma \pm \gamma}{1}$$

وإذا وضع بدل م مقداره في معادلة م = م - م تول الى

$$\text{م} = \frac{11 - \gamma \pm \gamma}{1}$$

فحينئذ المعادلتان المقروضتان تكونان متحقتين بكل من مقداري م
 ومقداري م غيرانه يلزم اخذ العلامتين العلويتين أو السفليتين لكل
 من المقدارين المأخوذين من مقداري م ومقداري م

(٢٤٣)

ولتكن ايضا على ان مقدارى x و y يكونان عين مقدارى a و b لان
المعادلتين المفروضتين لا تتغيران متى غير قيمهما المجهول x و y بالمجهول x
والمجهول y بالمجهول x فاذا عين مقدار a و b قبل التغيير كانا
عين مقدارى x و y المستخرجين بعد التغيير

(٩٠) اذا كان المطلوب حل المعادلتين $x + y = a$ و $x - y = b$

و $a = 10$ و $b = 2$ فلذلك حلان

الحل الاول ان يستخرج من المعادلة الثانية مقدار x فيكون
 $x = \frac{a+b}{2}$ ثم يوضع هذا المقدار في المعادلة الاولى فيحدث على التوالى

$$x + y = \frac{a+b}{2} \quad \text{أو}$$

$$x - y = \frac{a-b}{2} \quad \text{أو}$$

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \quad \text{ومنها يحدث}$$

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b+a-b}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

ولا استخراج مقدارى x يوضع في المعادلة $x - y = b$ بدل x

المقدار المضاعف \pm ثم يوضع أيضا المقدار المضاعف

$$\pm \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \right) = \pm \left(\frac{a+b-a+b}{2} \right) = \pm \left(\frac{2b}{2} \right) = \pm b$$

$$y = \pm b \quad \text{وباعى وهو}$$

وتحقق المعادلتان المفروضتان بجملة مقادير x الاربعة وبجدة مقادير
 y الاربعة وتستخرج هاتان الجائتان بتتبع علامات مقدار x باربعة

طرق

• (١٢٥) •

• طرق مختلفة ثم تؤخذ العلامات المطابقة لها من مقادير \pm فينتج تكون مقادير \pm عين مقادير \pm وهذا ناشئ عن كون الجوهلين داخلين بكيفية واحدة في المعادلتين المقروضتين

• (تنبيه) •

لا يمكن تحويل مقدار \pm = \pm الى $\sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}}$ الى

هذه الصورة \pm = $\sqrt{1 \pm 1}$ ويجب أن يكون $\frac{1}{2}$ مربعاً

كاملاً كما في (بند ٦٦) ومن المثال المقروض ينتج $\frac{1}{2} = 0$ او

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ فاذن يكون}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ أي أن } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ مربع كامل فاذن}$$

يمكن تحويل المقدار المقروض الى مقدار آخر بهذه الصورة $\sqrt{1 \pm 1}$

وحيث علم من (بند ٦٦) بعد الرمز الى $\frac{1}{2}$ بالحرف \pm أن

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ وتقدم أن } \frac{1}{2} = 0 \text{ و } \frac{1}{2} = 0$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} = \frac{1}{2}} \text{ يكون } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ وباخذ}$$

فيكون

$$\pm = \pm \text{ أو } \pm = \pm \text{ أو } \pm = \pm$$

(١٣٩)

ويجاء حل مثابه لذلك يحدث

$$صه = \pm \frac{1}{f} \left(\pm \frac{f}{f} + \frac{f}{f} \right) \pm \frac{f}{f} = \pm \frac{1}{f} \left(\pm 1 + 1 \right) \pm 1$$

• (الحل الثاني) •

ان يستنتج المقداران الاخيران من اول وهلة بطريقة أخصر من الطريقة

المستعملة في حل المعادلتين المقروضتين اللتين هما $صه + صبه = ص$

و $صه - صبه = ص$ وذلك بأن يجمع طرفا الى طرف مع ملاحظة

أن الطرف الاول الناتج يكون مبعأ كاملا للكمية ذات الخدين $صه + صبه$

فيحدث $(صه + صبه) = ص$ $صه + صبه = ص$ ومنها يستخرج

$$صه + صبه = ص$$

ثم تطرح المعادلة الثانية من الاولى فيحدث

$(صه - صبه) = ص$ $صه - صبه = ص$ ومنها ينتج

$$صه - صبه = ص$$

وحيث علم بمجموع المجهولين $صه$ و $صبه$ وفاصلهما يستخرج كل منهما

بواسطة القاعدة المقررة في (بند ٣) فيكونان

$$صه = \pm \frac{1}{f} \left(\pm \frac{f}{f} + \frac{f}{f} \right) \pm \frac{f}{f} = \pm \frac{1}{f} \left(\pm 1 + 1 \right) \pm 1$$

$$صبه = \pm \frac{1}{f} \left(\pm \frac{f}{f} - \frac{f}{f} \right) \pm \frac{f}{f} = \pm \frac{1}{f} \left(\pm 1 - 1 \right) \pm 1$$

(٩١) متواحتوت معادلة ذات مجهول واحد على علامة جذر تربيعي

مشتقل على المجهول المذكوراً وعلى علامات جذر كذا ذلك فلعلها يلزم أولاً

حذف العلامة او العلامات كما في الامثلة الآتية

• (المثال الاول) •

اذا كان المطلوب حل هذه المعادلة

$$٢ = ٢٠ + ٢$$

يحول ٢ الى الطرف الاول بحيث يكون الطرف الثاني محتويا على علامة الجذر فقط ثم يرفع كل من الطرفين الى الدرجة الثانية ويختصر الناتج فيحدث

$$(٢ - ٢٠) = (٢٠ - ٢)$$

$$٢ - ٢٠ = ٢٠ - ٢$$

$$٢ - ٢٠ = ٢٠ - ٢$$

$$٢ - ٢٠ = ٢٠ - ٢$$

$$\frac{٢٠ \pm ٢}{١٨} = \frac{٢٠ \pm ٢}{١٨} = \frac{٢٠ \pm ٢}{١٨} = \frac{٢٠ \pm ٢}{١٨}$$

$$\frac{٢٠ \pm ٢}{١٨} =$$

$$\frac{٢}{١٨} = \frac{٢}{١٨} = \frac{٢٠ - ٢}{١٨} = \frac{٢٠ + ٢}{١٨}$$

ولتحقيق هذين المقدارين يوضع في المعادلة ٢ = ٢٠ - ٢
بدل ٢ مقداره وهو ٢ فيحدث

$$٢ = ٢٠ - ٢$$

اعني ان المقدار الاول يكون محققا للمعادلة

واذا وضع في المعادلة بعينها بدل ٢ مقداره وهو ٢ تول الى
٢ = ٢٠ - ٢ أو ٢ = ٢٠ - ٢ وهذا ما فاديه ثبت ان مقدار

٢ لا يكون محققا للمعادلة ٢ = ٢٠ - ٢

ولو كان محققا للمعادلة ٢ = ٢٠ - ٢

لان بعض مقادير الجاهول ٢ اذا صير طرفي المعادلة ٢ = ٢٠ - ٢

= ٢٠ - ٢ متساويين ومتخالفين في العلامة يصير طرفي المعادلة

(١٢٩)•

$$\sqrt[3]{\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}} = 1 - \frac{1}{2}$$

ثم يربع ايضا طرفا هذه المعادلة الاخيرة فيحدث

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 1 - \frac{1}{2} \text{ او } \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 1 - \frac{1}{2} \text{ ومنها يحدث}$$

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 1 - \frac{1}{2} \text{ او } \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 1 - \frac{1}{2} \text{ او } \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 1 - \frac{1}{2}$$

فاذن يكون مجموع هذه اربعة مقادير متغايرة هي

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 1 - \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 1 - \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 1 - \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 1 - \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 1 - \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 1 - \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 1 - \frac{1}{2}$$

ولا تصفق المعادلة المقروضة بقية داري $\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 1 - \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 1 - \frac{1}{2}$

• (الباب الرابع) •

• (في التناسبات والمتواليات العددية والهندسية واللوغاريتمية) •

• (في التناسبة العددية أي التنافضية) •

(٩٢) براهين خواص التناسبة المقررة في كتب علم الحساب تسور

بعد بواسطة القواعد الجبرية وبيان ذلك أن يقال

كل متناسبة عددية كالتناسبة

• • • • •

• اوضع هكذا

• • • • •

• • • • •

أعني أن كل متناسبة عددية حاصل جمع طرفيها يساوي حاصل جمع وسطيه

وأن أحد طرفيها يساوي حاصل جمع وسطيه واستقصا منه الطرف الآخر

وأن أحد وسطيه يساوي حاصل جمع طرفيه واستقصا منه الوسط الآخر

ويستتج من المساوية • • • • • أن • • • • • وأعني

اذا ساوى حاصل جمع عددين حاصل جمع آخرين تركيب من هذه الاعداد
الاربعة متناسبة عددية جزأً أحداً الحاصلين طرفاً وجزأً الآخر وسطاً
والوسط التفاضلي لعددین يساوى نصف حاصل جمعهم لانه من المتناسبة

$$a : b :: c : d \text{ يحدث}$$

$$a + c = b + d \text{ ومن هذه المساوية ينتج}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

• (في المتناسبة الهندسية) •

(٩٣) كل متناسبة هندسية كالتناسبية $a : b :: c : d$ و

نوضع هكذا $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ومن هذه المساوية يستنتج

$$a = \frac{b \cdot c}{d} \text{ و } b = \frac{a \cdot d}{c} \text{ و } c = \frac{a \cdot b}{d} \text{ و } d = \frac{a \cdot b}{c}$$

أعني أن كل متناسبة هندسية حاصل ضرب طرفيها يساوى حاصل ضرب

وسطيها وأن أحد طرفيها يساوى خارج قسمة حاصل ضرب وسطيها على طرفها

الآخر وأن أحد وسطيها يساوى خارج قسمة حاصل ضرب طرفيها على الوسط

الآخر ويستنتج من كل مساوية كالتساوية $a = \frac{b \cdot c}{d}$ و $b = \frac{a \cdot d}{c}$ أن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

أعني اذا ساوى حاصل ضرب عددين حاصل ضرب عددين آخرين تركيب

من هذه الاعداد الاربعة متناسبة هندسية اصلاً أحد الحاصلين طرفان لها

واصلاً الحاصل الآخر وسطان لها

ويستنتج من المساوية $a = \frac{b \cdot c}{d}$ بناء على ما تقدم ثمان متناسبات

$$a : b :: c : d \text{ و } a : c :: b : d \text{ و } a : d :: b : c \text{ و } b : a :: d : c \text{ و } b : c :: a : d \text{ و } c : a :: d : b \text{ و } c : d :: a : b \text{ و } d : a :: b : c$$

$$\text{و } d : b :: a : c \text{ و } d : c :: a : b \text{ و } d : a :: b : c \text{ و } d : b :: a : c$$

فيشاهد من متناسبات النصف الاول الاربعة أن الاعداد الاربعة المتناسبة

مع بعضها يكوّن منها متناسبة ايضاً بتغيير موضع الوسطين أو الطرفين

وبشاهد ايضاً من متناسبات النصف الثاني الاربعة ان تناسب لا يتغير بتغيير

الطرفين بالوسطين ولا الوسطين بالطرفين

والوسط الهندسي بين عددين او كيتين يساوى جذر حاصل ضربهما لانه من

المتناسبة

المتناسبة $a : b :: c : d$ يحدث

$$a \times d = b \times c \text{ أو } a : b :: c : d$$

وإذا ضرب طرف ووسط متناسبة في عدد واحد أو قسما عليه بقيت النسبة

على حالها لأنه يستتبع من التساوية $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ أن

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ أو } a : b :: c : d \text{ وم}$$

ويستتبع أيضا من التساوية المذكورة $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ومن هذا يحدث

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ أي } a : c :: b : d \text{ وم}$$

ويجمل هذا ببرهن على حالة القسمة

وإذا كان لتناسبتين نسبة مشتركة تركب من النسبتين الأخرين منهما متناسبة

فالتناسبتان

$$a : b :: c : d \text{ و } e : f :: g : h \text{ وضعان هكذا}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ و } \frac{e}{f} = \frac{g}{h} \text{ ومن هاتين المتساويتين يحدث}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ أي } a : b :: c : d$$

ومثلي تقدم المتقدمان أو التاليان في متناسبتين تركب من غير التقدم منهما

متناسبة فالتناسبتان

$$a : b :: c : d \text{ و } e : f :: g : h \text{ أو}$$

$$e : f :: g : h \text{ و } a : b :: c : d$$

يستتبع منهما يقتضي ما تقدم

$$a : b :: c : d \text{ و } e : f :: g : h \text{ فثبت يحدث}$$

$$a : b :: c : d \text{ أي } a : b :: c : d$$

وكل متناسبة هندسية كالتسوية $a : b :: c : d$ يمكن زيادتها

هكذا $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ وبضفة واحدة لكل من طرفي هذه التساوية أو طرحه

منها تؤول إلى

155

$$1 \pm \frac{x}{2} = 1 \pm \frac{x}{2}$$

$$\frac{1 \pm \frac{x}{2}}{2} = \frac{1 \pm \frac{x}{2}}{2}$$

ومنہا یحدث

وَيُحَدِّثُ إِضْمًا مِنْ مَقَارِنَةِ الْمُنَاسِبَةِ
الْمُنَاسِبَتَيْنِ الْمُتَقَابِلَتَيْنِ
وَمِنْهَا يُحَدِّثُ

$$9 - 5 : 9 + 5 :: 3 - 7 : 3 + 7$$

ويخرج من ذلك أن نسبة المتقدم الأول زائدا أو ناقصا التالي الأول الى هذا
التالي كنسبة المتقدم الثاني زائدا أو ناقصا التالي الثاني الى هذا التالي
وأن نسبة المتقدم الأول زائدا أو ناقصا التالي الأول الى هذا المتقدم كنسبة
المقدم الثاني زائدا أو ناقصا التالي الثاني الى هذا المتقدم وأن نسبة المتقدم
الأول زائدا تاليه الى هذا المتقدم ناقصا تاليه كنسبة المتقدم الثاني زائدا تاليه
الى هذا المتقدم ناقصا تاليه

وانظر وسط المتاسبة م : و :: ه : و آلت الى

ج : ه :: د : و و منها یحدث بناء علی ما تقدم
 ج : ه :: د : و و منها یحدث
 ج : ه :: د : و و منها یحدث

اعني ان نسبة حاصل جمع اوقاضل مقدم الى متنااسبة الى حاصل جمع اوقاضل
تاليها كنسبة في مقدم الى تاليه وان نسبة حاصل جمع المتقدمين وحاصل جمع
تاليين تعادل النسبتين فان عدل المتقدمين وقاضل التالين والمتنااسبة التي
يعدل عنها ح : د :: هـ : و :: ز : ح :: ط : ع :: الخ تسمى
متنااسبة متزايدة

وكل متعاقبة متوالية من أجل جمع مقدماتها إلى حاصل جمع زوايا كل متعاقبة

• (١٢١) •

أى مقدم الى تاليه فاذا اخرجنا النسبة المشتركة في هذه التناسبة بالحرف ل
تحصل $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \frac{14}{21} = \frac{16}{24} = \frac{18}{27} = \frac{20}{30} = \frac{22}{33} = \frac{24}{36} = \frac{26}{39} = \frac{28}{42} = \frac{30}{45} = \frac{32}{48} = \frac{34}{51} = \frac{36}{54} = \frac{38}{57} = \frac{40}{60} = \frac{42}{63} = \frac{44}{66} = \frac{46}{69} = \frac{48}{72} = \frac{50}{75} = \frac{52}{78} = \frac{54}{81} = \frac{56}{84} = \frac{58}{87} = \frac{60}{90} = \frac{62}{93} = \frac{64}{96} = \frac{66}{99} = \frac{68}{102} = \frac{70}{105} = \frac{72}{108} = \frac{74}{111} = \frac{76}{114} = \frac{78}{117} = \frac{80}{120} = \frac{82}{123} = \frac{84}{126} = \frac{86}{129} = \frac{88}{132} = \frac{90}{135} = \frac{92}{138} = \frac{94}{141} = \frac{96}{144} = \frac{98}{147} = \frac{100}{150} = \frac{102}{153} = \frac{104}{156} = \frac{106}{159} = \frac{108}{162} = \frac{110}{165} = \frac{112}{168} = \frac{114}{171} = \frac{116}{174} = \frac{118}{177} = \frac{120}{180} = \frac{122}{183} = \frac{124}{186} = \frac{126}{189} = \frac{128}{192} = \frac{130}{195} = \frac{132}{198} = \frac{134}{201} = \frac{136}{204} = \frac{138}{207} = \frac{140}{210} = \frac{142}{213} = \frac{144}{216} = \frac{146}{219} = \frac{148}{222} = \frac{150}{225} = \frac{152}{228} = \frac{154}{231} = \frac{156}{234} = \frac{158}{237} = \frac{160}{240} = \frac{162}{243} = \frac{164}{246} = \frac{166}{249} = \frac{168}{252} = \frac{170}{255} = \frac{172}{258} = \frac{174}{261} = \frac{176}{264} = \frac{178}{267} = \frac{180}{270} = \frac{182}{273} = \frac{184}{276} = \frac{186}{279} = \frac{188}{282} = \frac{190}{285} = \frac{192}{288} = \frac{194}{291} = \frac{196}{294} = \frac{198}{297} = \frac{200}{300} = \frac{202}{303} = \frac{204}{306} = \frac{206}{309} = \frac{208}{312} = \frac{210}{315} = \frac{212}{318} = \frac{214}{321} = \frac{216}{324} = \frac{218}{327} = \frac{220}{330} = \frac{222}{333} = \frac{224}{336} = \frac{226}{339} = \frac{228}{342} = \frac{230}{345} = \frac{232}{348} = \frac{234}{351} = \frac{236}{354} = \frac{238}{357} = \frac{240}{360} = \frac{242}{363} = \frac{244}{366} = \frac{246}{369} = \frac{248}{372} = \frac{250}{375} = \frac{252}{378} = \frac{254}{381} = \frac{256}{384} = \frac{258}{387} = \frac{260}{390} = \frac{262}{393} = \frac{264}{396} = \frac{266}{399} = \frac{268}{402} = \frac{270}{405} = \frac{272}{408} = \frac{274}{411} = \frac{276}{414} = \frac{278}{417} = \frac{280}{420} = \frac{282}{423} = \frac{284}{426} = \frac{286}{429} = \frac{288}{432} = \frac{290}{435} = \frac{292}{438} = \frac{294}{441} = \frac{296}{444} = \frac{298}{447} = \frac{300}{450} = \frac{302}{453} = \frac{304}{456} = \frac{306}{459} = \frac{308}{462} = \frac{310}{465} = \frac{312}{468} = \frac{314}{471} = \frac{316}{474} = \frac{318}{477} = \frac{320}{480} = \frac{322}{483} = \frac{324}{486} = \frac{326}{489} = \frac{328}{492} = \frac{330}{495} = \frac{332}{498} = \frac{334}{501} = \frac{336}{504} = \frac{338}{507} = \frac{340}{510} = \frac{342}{513} = \frac{344}{516} = \frac{346}{519} = \frac{348}{522} = \frac{350}{525} = \frac{352}{528} = \frac{354}{531} = \frac{356}{534} = \frac{358}{537} = \frac{360}{540} = \frac{362}{543} = \frac{364}{546} = \frac{366}{549} = \frac{368}{552} = \frac{370}{555} = \frac{372}{558} = \frac{374}{561} = \frac{376}{564} = \frac{378}{567} = \frac{380}{570} = \frac{382}{573} = \frac{384}{576} = \frac{386}{579} = \frac{388}{582} = \frac{390}{585} = \frac{392}{588} = \frac{394}{591} = \frac{396}{594} = \frac{398}{597} = \frac{400}{600} = \frac{402}{603} = \frac{404}{606} = \frac{406}{609} = \frac{408}{612} = \frac{410}{615} = \frac{412}{618} = \frac{414}{621} = \frac{416}{624} = \frac{418}{627} = \frac{420}{630} = \frac{422}{633} = \frac{424}{636} = \frac{426}{639} = \frac{428}{642} = \frac{430}{645} = \frac{432}{648} = \frac{434}{651} = \frac{436}{654} = \frac{438}{657} = \frac{440}{660} = \frac{442}{663} = \frac{444}{666} = \frac{446}{669} = \frac{448}{672} = \frac{450}{675} = \frac{452}{678} = \frac{454}{681} = \frac{456}{684} = \frac{458}{687} = \frac{460}{690} = \frac{462}{693} = \frac{464}{696} = \frac{466}{699} = \frac{468}{702} = \frac{470}{705} = \frac{472}{708} = \frac{474}{711} = \frac{476}{714} = \frac{478}{717} = \frac{480}{720} = \frac{482}{723} = \frac{484}{726} = \frac{486}{729} = \frac{488}{732} = \frac{490}{735} = \frac{492}{738} = \frac{494}{741} = \frac{496}{744} = \frac{498}{747} = \frac{500}{750} = \frac{502}{753} = \frac{504}{756} = \frac{506}{759} = \frac{508}{762} = \frac{510}{765} = \frac{512}{768} = \frac{514}{771} = \frac{516}{774} = \frac{518}{777} = \frac{520}{780} = \frac{522}{783} = \frac{524}{786} = \frac{526}{789} = \frac{528}{792} = \frac{530}{795} = \frac{532}{798} = \frac{534}{801} = \frac{536}{804} = \frac{538}{807} = \frac{540}{810} = \frac{542}{813} = \frac{544}{816} = \frac{546}{819} = \frac{548}{822} = \frac{550}{825} = \frac{552}{828} = \frac{554}{831} = \frac{556}{834} = \frac{558}{837} = \frac{560}{840} = \frac{562}{843} = \frac{564}{846} = \frac{566}{849} = \frac{568}{852} = \frac{570}{855} = \frac{572}{858} = \frac{574}{861} = \frac{576}{864} = \frac{578}{867} = \frac{580}{870} = \frac{582}{873} = \frac{584}{876} = \frac{586}{879} = \frac{588}{882} = \frac{590}{885} = \frac{592}{888} = \frac{594}{891} = \frac{596}{894} = \frac{598}{897} = \frac{600}{900} = \frac{602}{903} = \frac{604}{906} = \frac{606}{909} = \frac{608}{912} = \frac{610}{915} = \frac{612}{918} = \frac{614}{921} = \frac{616}{924} = \frac{618}{927} = \frac{620}{930} = \frac{622}{933} = \frac{624}{936} = \frac{626}{939} = \frac{628}{942} = \frac{630}{945} = \frac{632}{948} = \frac{634}{951} = \frac{636}{954} = \frac{638}{957} = \frac{640}{960} = \frac{642}{963} = \frac{644}{966} = \frac{646}{969} = \frac{648}{972} = \frac{650}{975} = \frac{652}{978} = \frac{654}{981} = \frac{656}{984} = \frac{658}{987} = \frac{660}{990} = \frac{662}{993} = \frac{664}{996} = \frac{666}{999} = \frac{668}{1002} = \frac{670}{1005} = \frac{672}{1008} = \frac{674}{1011} = \frac{676}{1014} = \frac{678}{1017} = \frac{680}{1020} = \frac{682}{1023} = \frac{684}{1026} = \frac{686}{1029} = \frac{688}{1032} = \frac{690}{1035} = \frac{692}{1038} = \frac{694}{1041} = \frac{696}{1044} = \frac{698}{1047} = \frac{700}{1050} = \frac{702}{1053} = \frac{704}{1056} = \frac{706}{1059} = \frac{708}{1062} = \frac{710}{1065} = \frac{712}{1068} = \frac{714}{1071} = \frac{716}{1074} = \frac{718}{1077} = \frac{720}{1080} = \frac{722}{1083} = \frac{724}{1086} = \frac{726}{1089} = \frac{728}{1092} = \frac{730}{1095} = \frac{732}{1098} = \frac{734}{1101} = \frac{736}{1104} = \frac{738}{1107} = \frac{740}{1110} = \frac{742}{1113} = \frac{744}{1116} = \frac{746}{1119} = \frac{748}{1122} = \frac{750}{1125} = \frac{752}{1128} = \frac{754}{1131} = \frac{756}{1134} = \frac{758}{1137} = \frac{760}{1140} = \frac{762}{1143} = \frac{764}{1146} = \frac{766}{1149} = \frac{768}{1152} = \frac{770}{1155} = \frac{772}{1158} = \frac{774}{1161} = \frac{776}{1164} = \frac{778}{1167} = \frac{780}{1170} = \frac{782}{1173} = \frac{784}{1176} = \frac{786}{1179} = \frac{788}{1182} = \frac{790}{1185} = \frac{792}{1188} = \frac{794}{1191} = \frac{796}{1194} = \frac{798}{1197} = \frac{800}{1200} = \frac{802}{1203} = \frac{804}{1206} = \frac{806}{1209} = \frac{808}{1212} = \frac{810}{1215} = \frac{812}{1218} = \frac{814}{1221} = \frac{816}{1224} = \frac{818}{1227} = \frac{820}{1230} = \frac{822}{1233} = \frac{824}{1236} = \frac{826}{1239} = \frac{828}{1242} = \frac{830}{1245} = \frac{832}{1248} = \frac{834}{1251} = \frac{836}{1254} = \frac{838}{1257} = \frac{840}{1260} = \frac{842}{1263} = \frac{844}{1266} = \frac{846}{1269} = \frac{848}{1272} = \frac{850}{1275} = \frac{852}{1278} = \frac{854}{1281} = \frac{856}{1284} = \frac{858}{1287} = \frac{860}{1290} = \frac{862}{1293} = \frac{864}{1296} = \frac{866}{1299} = \frac{868}{1302} = \frac{870}{1305} = \frac{872}{1308} = \frac{874}{1311} = \frac{876}{1314} = \frac{878}{1317} = \frac{880}{1320} = \frac{882}{1323} = \frac{884}{1326} = \frac{886}{1329} = \frac{888}{1332} = \frac{890}{1335} = \frac{892}{1338} = \frac{894}{1341} = \frac{896}{1344} = \frac{898}{1347} = \frac{900}{1350} = \frac{902}{1353} = \frac{904}{1356} = \frac{906}{1359} = \frac{908}{1362} = \frac{910}{1365} = \frac{912}{1368} = \frac{914}{1371} = \frac{916}{1374} = \frac{918}{1377} = \frac{920}{1380} = \frac{922}{1383} = \frac{924}{1386} = \frac{926}{1389} = \frac{928}{1392} = \frac{930}{1395} = \frac{932}{1398} = \frac{934}{1401} = \frac{936}{1404} = \frac{938}{1407} = \frac{940}{1410} = \frac{942}{1413} = \frac{944}{1416} = \frac{946}{1419} = \frac{948}{1422} = \frac{950}{1425} = \frac{952}{1428} = \frac{954}{1431} = \frac{956}{1434} = \frac{958}{1437} = \frac{960}{1440} = \frac{962}{1443} = \frac{964}{1446} = \frac{966}{1449} = \frac{968}{1452} = \frac{970}{1455} = \frac{972}{1458} = \frac{974}{1461} = \frac{976}{1464} = \frac{978}{1467} = \frac{980}{1470} = \frac{982}{1473} = \frac{984}{1476} = \frac{986}{1479} = \frac{988}{1482} = \frac{990}{1485} = \frac{992}{1488} = \frac{994}{1491} = \frac{996}{1494} = \frac{998}{1497} = \frac{1000}{1500} = \frac{1002}{1503} = \frac{1004}{1506} = \frac{1006}{1509} = \frac{1008}{1512} = \frac{1010}{1515} = \frac{1012}{1518} = \frac{1014}{1521} = \frac{1016}{1524} = \frac{1018}{1527} = \frac{1020}{1530} = \frac{1022}{1533} = \frac{1024}{1536} = \frac{1026}{1539} = \frac{1028}{1542} = \frac{1030}{1545} = \frac{1032}{1548} = \frac{1034}{1551} = \frac{1036}{1554} = \frac{1038}{1557} = \frac{1040}{1560} = \frac{1042}{1563} = \frac{1044}{1566} = \frac{1046}{1569} = \frac{1048}{1572} = \frac{1050}{1575} = \frac{1052}{1578} = \frac{1054}{1581} = \frac{1056}{1584} = \frac{1058}{1587} = \frac{1060}{1590} = \frac{1062}{1593} = \frac{1064}{1596} = \frac{1066}{1599} = \frac{1068}{1602} = \frac{1070}{1605} = \frac{1072}{1608} = \frac{1074}{1611} = \frac{1076}{1614} = \frac{1078}{1617} = \frac{1080}{1620} = \frac{1082}{1623} = \frac{1084}{1626} = \frac{1086}{1629} = \frac{1088}{1632} = \frac{1090}{1635} = \frac{1092}{1638} = \frac{1094}{1641} = \frac{1096}{1644} = \frac{1098}{1647} = \frac{1100}{1650} = \frac{1102}{1653} = \frac{1104}{1656} = \frac{1106}{1659} = \frac{1108}{1662} = \frac{1110}{1665} = \frac{1112}{1668} = \frac{1114}{1671} = \frac{1116}{1674} = \frac{1118}{1677} = \frac{1120}{1680} = \frac{1122}{1683} = \frac{1124}{1686} = \frac{1126}{1689} = \frac{1128}{1692} = \frac{1130}{1695} = \frac{1132}{1698} = \frac{1134}{1701} = \frac{1136}{1704} = \frac{1138}{1707} = \frac{1140}{1710} = \frac{1142}{1713} = \frac{1144}{1716} = \frac{1146}{1719} = \frac{1148}{1722} = \frac{1150}{1725} = \frac{1152}{1728} = \frac{1154}{1731} = \frac{1156}{1734} = \frac{1158}{1737} = \frac{1160}{1740} = \frac{1162}{1743} = \frac{1164}{1746} = \frac{1166}{1749} = \frac{1168}{1752} = \frac{1170}{1755} = \frac{1172}{1758} = \frac{1174}{1761} = \frac{1176}{1764} = \frac{1178}{1767} = \frac{1180}{1770} = \frac{1182}{1773} = \frac{1184}{1776} = \frac{1186}{1779} = \frac{1188}{1782} = \frac{1190}{1785} = \frac{1192}{1788} = \frac{1194}{1791} = \frac{1196}{1794} = \frac{1198}{1797} = \frac{1200}{1800} = \frac{1202}{1803} = \frac{1204}{1806} = \frac{1206}{1809} = \frac{1208}{1812} = \frac{1210}{1815} = \frac{1212}{1818} = \frac{1214}{1821} = \frac{1216}{1824} = \frac{1218}{1827} = \frac{1220}{1830} = \frac{1222}{1833} = \frac{1224}{1836} = \frac{1226}{1839} = \frac{1228}{1842} = \frac{1230}{1845} = \frac{1232}{1848} = \frac{1234}{1851} = \frac{1236}{1854} = \frac{1238}{1857} = \frac{1240}{1860} = \frac{1242}{1863} = \frac{1244}{1866} = \frac{1246}{1869} = \frac{1248}{1872} = \frac{1250}{1875} = \frac{1252}{1878} = \frac{1254}{1881} = \frac{1256}{1884} = \frac{1258}{1887} = \frac{1260}{1890} = \frac{1262}{1893} = \frac{1264}{1896} = \frac{1266}{1899} = \frac{1268}{1902} = \frac{1270}{1905} = \frac{1272}{1908} = \frac{1274}{1911} = \frac{1276}{1914} = \frac{1278}{1917} = \frac{1280}{1920} = \frac{1282}{1923} = \frac{1284}{1926} = \frac{1286}{1929} = \frac{1288}{1932} = \frac{1290}{1935} = \frac{1292}{1938} = \frac{1294}{1941} = \frac{1296}{1944} = \frac{1298}{1947} = \frac{1300}{1950} = \frac{1302}{1953} = \frac{1304}{1956} = \frac{1306}{1959} = \frac{1308}{1962} = \frac{1310}{1965} = \frac{1312}{1968} = \frac{1314}{1971} = \frac{1316}{1974} = \frac{1318}{1977} = \frac{1320}{1980} = \frac{1322}{1983} = \frac{1324}{1986} = \frac{1326}{1989} = \frac{1328}{1992} = \frac{1330}{1995} = \frac{1332}{1998} = \frac{1334}{2001} = \frac{1336}{2004} = \frac{1338}{2007} = \frac{1340}{2010} = \frac{1342}{2013} = \frac{1344}{2016} = \frac{1346}{2019} = \frac{1348}{2022} = \frac{1350}{2025} = \frac{1352}{2028} = \frac{1354}{2031} = \frac{1356}{2034} = \frac{1358}{2037} = \frac{1360}{2040} = \frac{1362}{2043} = \frac{1364}{2046} = \frac{1366}{2049} = \frac{1368}{2052} = \frac{1370}{2055} = \frac{1372}{2058} = \frac{1374}{2061} = \frac{1376}{2064} = \frac{1378}{2067} = \frac{1380}{2070} = \frac{1382}{2073} = \frac{1384}{2076} = \frac{1386}{2079} = \frac{1388}{2082} = \frac{1390}{2085} = \frac{1392}{2088} = \frac{1394}{2091} = \frac{1396}{2094} = \frac{1398}{2097} = \frac{1400}{2100} = \frac{1402}{2103} = \frac{1404}{2106} = \frac{1406}{2109} = \frac{1408}{2112} = \frac{1410}{2115} = \frac{1412}{2118} = \frac{1414}{2121} = \frac{1416}{2124} = \frac{1418}{2127} = \frac{1420}{2130} = \frac{1422}{2133} = \frac{1424}{2136} = \frac{1426}{2139} = \frac{1428}{2142} = \frac{1430}{2145} = \frac{1432}{2148} = \frac{1434}{2151} = \frac{1436}{2154} = \frac{1438}{2157} = \frac{1440}{2160} = \frac{1442}{2163} = \frac{1444}{2166} = \frac{1446}{2169} = \frac{1448}{2172} = \frac{1450}{2175} = \frac{1452}{2178} = \frac{1454}{2181} = \frac{1456}{2184} = \frac{1458}{2187} = \frac{1460}{2190} = \frac{1462}{2193} = \frac{1464}{2196} = \frac{1466}{2199} = \frac{1468}{2202} = \frac{1470}{2205} = \frac{1472}{2208} = \frac{1474}{2211} = \frac{1476}{2214} = \frac{1478}{2217} = \frac{1480}{2220} = \frac{1482}{2223} = \frac{1484}{2226} = \frac{1486}{2229} = \frac{1488}{2232} = \frac{1490}{2235} = \frac{1492}{2238} = \frac{1494}{2241} = \frac{1496}{2244} = \frac{1498}{2247} = \frac{1500}{2250} = \frac{1502}{2253} = \frac{1504}{2256} = \frac{1506}{2259} = \frac{1508}{2262} = \frac{1510}{2265} = \frac{1512}{2268} = \frac{1514}{2271} = \frac{1516}{2274} = \frac{1518}{2277} = \frac{1520}{2280} = \frac{1522}{2283} = \frac{1524}{2286} = \frac{1526}{2289} = \frac{1528}{2292} = \frac{1530}{2295} = \frac{1532}{2298} = \frac{1534}{2301} = \frac{1536}{2304} = \frac{1538}{2307} = \frac{1540}{2310} = \frac{1542}{2313} = \frac{1544}{2316} = \frac{1546}{2319} = \frac{1548}{2322} = \frac{1550}{2325} = \frac{1552}{2328} = \frac{1554}{2331} = \frac{1556}{2334} = \frac{1558}{2337} = \frac{1560}{2340} = \frac{1562}{2343} = \frac{1564}{2346} = \frac{1566}{2349} = \frac{1568}{2352} = \frac{1570}{2355} = \frac{1572}{2358} = \frac{1574}{2361} = \frac{1576}{2364} = \frac{1578}{2367} = \frac{1580}{2370} = \frac{1582}{2373} = \frac{1584}{2376} = \frac{1586}{2379} = \frac{1588}{2382} = \frac{1590}{2385} = \frac{1592}{2388} = \frac{1594}{2391} = \frac{1596}{2394} = \frac{1598}{2397} = \frac{1600}{2400} = \frac{1602}{2403} = \frac{1604}{2406} = \frac{1606}{2409} = \frac{1608}{2412} = \frac{1610}{2415} = \frac{1612}{2418} = \frac{1614}{2421} = \frac{1616}{2424} = \frac{1618}{2427} = \frac{1620}{2430} = \frac{1622}{2433} = \frac{1624}{2436} = \frac{1626}{2439} = \frac{1628}{2442} = \frac{1630}{2445} = \frac{1632}{2448} = \frac{1634}{2451} = \frac{1636}{2454} = \frac{1638}{2457} = \frac{1640}{2460} = \frac{1642}{2463} = \frac{1644}{2466} = \frac{1646}{2469} = \frac{1648}{2472} = \frac{1650}{2475} = \frac{1652}{2478} = \frac{1654}{2481} = \frac{1656}{2484} = \frac{1658}{2487} = \frac{1660}{2490} = \frac{1662}{2493} = \frac{1664}{2496} = \frac{1666}{2499} = \frac{1668}{2502} = \frac{1670}{2505} = \frac{1672}{2508} = \frac{1674}{2511} = \frac{1676}{2514} = \frac{1678}{2517} = \frac{1680}{2520} = \frac{1682}{2523} = \frac{1684}{2526} = \frac{1686}{2529} = \frac{1688}{2532} = \frac{1690}{2535} = \frac{1692}{2538} = \frac{1694}{2541} = \frac{1696}{2544} = \frac{1698}{2547} = \frac{1700}{2550} = \frac{1702}{2553} = \frac{1704}{2556} = \frac{1706}{2559} = \frac{1708}{2562} = \frac{1710}{2565} = \frac{1712}{2568} = \frac{1714}{2571} = \frac{1716}{2574} = \frac{1718}{2577} = \frac{1720}{2580} = \frac{1722}{2583} = \frac{1724}{2586} = \frac{1726}{2589} = \frac{1728}{2592} = \frac{1730}{2595} = \frac{1732}{2598} = \frac{1734}{2601} = \frac{1736}{2604} = \frac{1738}{2607} = \frac{1740}{2610} = \frac{1742}{2613} = \frac{1744}{2616} = \frac{1746}{2619} = \frac{1748}{2622} = \frac{1750}{2625} = \frac{1752}{2628} = \frac{1754}{2631} = \frac{1756}{2634} = \frac{1758}{2637} = \frac{1760}{2640} = \frac{1762}{2643} = \frac{1764}{2646} = \frac{1766}{2649} = \frac{1768}{2652} = \frac{1770}{2655} = \frac{1772}{2658} = \frac{1774}{2661} = \frac{1776}{2664} = \frac{1778}{2667} = \frac{1780}{2670} = \frac{1782}{2673} = \frac{1784}{2676} = \frac{1786}{2679} = \frac{1788}{2682} = \frac{1790}{2685} = \frac{1792}{2688} = \frac{1794}{2691} = \frac{1796}{2694} = \frac{1798}{2697} = \frac{1800}{2700} = \frac{1802}{2703} = \frac{1804}{2706} = \frac{1806}{2709} = \frac{1808}{2712} = \frac{1810}{2715} = \frac{1812}{2718} = \frac{1814}{2721} = \frac{1816}{2724} = \frac{1818}{2727} = \frac{1820}{2730} = \frac{1822}{2733} = \frac{1824}{2736} = \frac{1826}{2739} = \frac{1828}{2742} = \frac{1830}{2745} = \frac{1832}{2748} = \frac{1834}{2751} = \frac{1836}{2754} = \frac{1838}{2757} = \frac{1840}{2760} = \frac{1842}{2763} = \frac{1844}{2766} = \frac{1846}{2769} = \frac{1848}{2772} = \frac{1850}{2775} = \frac{1852}{2778} = \frac{1854}{2781} = \frac{1856}{2784} = \frac{1858}{2787} = \frac{1860}{2790} = \frac{1862}{2793} = \frac{1864}{2796} = \frac{1866}{2799} = \frac{1868}{2802} = \frac{1870}{2805} = \frac{1872}{2808} = \frac{1874}{2811} = \frac{1876}{2814} = \frac{1878}{2817} = \frac{1880}{2820} = \frac{1882}{2823} = \frac{1884}{2826} = \frac{1886}{2829}$

• (١٢٤) •

٢ : ٤ :: ٦ : ٨ و ١٠ : ١٢ :: ١٤ : ١٦ و ١٨ : ٢٠ :: ٢٢ : ٢٤ و ٢٦ : ٢٨

• (في المتواليات العددية) •

(٩٤) كل متسلسلة مركبة من حدود يزيد احدھا عن سابقه أو ينقص عنه بكمية ثابتة تسمى متوالية عددية أو تفاضلية والكمية الثابتة تسمى أساس المتوالية فالمتسلسلتان

١ و ٤ و ٧ و ١٠ و ١٣ و ١٦ و ١٩ و ٢٢ و ٢٥ و ٢٨ و ٣١ و ٣٤ و ٣٦ و ٤٠ و ٤٤ و ٤٨ و ٥٢ و ٥٦ و ٦٠
تسميان متوالتين الآن الأولى تسمى متوالية عددية تصاعدية أساسها ثلاثة
والأخرى تنازلية أساسها أربعة فالمتوالية العددية تكون تصاعدية أو تنازلية
بحسب كون أساسها موجبا أو سالبا

وإذا رمزنا بالحروف $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ الخ حدود متوالية
عددية فوضع هكذا

$a = 1, b = 4, c = 7, d = 10, e = 13, f = 16, g = 19, h = 22, i = 25, j = 28, k = 31, l = 34, m = 36, n = 40, o = 44, p = 48, q = 52, r = 56, s = 60$
ويلاحظ بها a إلى d كنسبة d إلى a كنسبة h إلى a إلى l إلى o الخ
وإذا رمزنا لاساس بالحرف m وللحد الأول بالحرف a وللحد الأخير
المسبوق بحدود عددها n — بالحرف l نحصل بمقتضى التعريف
 $a = 1, b = 4, c = 7, d = 10, e = 13, f = 16, g = 19, h = 22, i = 25, j = 28, k = 31, l = 34, m = 36, n = 40, o = 44, p = 48, q = 52, r = 56, s = 60$
أي أن أي حد من متوالية عددية يساوي الحد الأول مضافا إليه حاصل
ضرب عدد الحدود السابقة في الأساس

وحيث أن المعادلة $l = a + m(m-1)$ (١) ...
نستقل على أربع كميات لا يمكن ادراكها إلا بعد معرفة الثلاث الأخرى
وإننا نريد ادخال جملة حدود عددها m بين أي حدين معلومين بشرط
أن يتوسط من الجميع متوالية عددية شوهذان هذه المتوالية لا تحتاج

• • (١٤٥) • •

في تركيبها الاتعيين اساسها المجهول ولذا يستخرج من القانون (١)

$$م = \frac{ل - ١}{٢}$$

وحيث ان $٢ = م + ٢$ يكون

$$م = \frac{ل - ١}{٢}$$

اعني ان اساس المتوالية المطلوب يساوي خرج قسمة قاضل الحدين المعالومين على عدد الحدود المدخلة زائدا واحدا

فاذا اريد ادخال ثمانية حدود بين العددين ٤ و ٤٩ بحيث يتركب من الجميع متوالية عددية وضع في المعادلة $م = \frac{ل - ١}{٢}$ بدل ل و ٣ و م مقاديرها وهي ٤٩ و ٤ و ٨ فيحصل $م = \frac{٤٩ - ٤}{٢} = ٢٢$ اعني ان اساس المطلوب يساوي ٢٢ وحيث ان تركيب المتوالية هكذا

٤ . ٩ . ١٤ . ١٩ . ٢٤ . ٢٩ . ٣٤ . ٣٩ . ٤٤ . ٤٩
وهاصل جمع كل حدين كائين على ابعاد متساوية من طرفي متوالية يساوي
حاصل جمع هذين الطرفين فمن المتوالية العددية

ب . ج . د . هـ . و . ز . ح . ط . ث . ي . يحصل

$$٤ + ٤٩ = ٥٣ \quad ٩ + ٣٩ = ٤٨ \quad ١٤ + ٢٩ = ٤٣ \quad ١٩ + ٢٤ = ٤٣$$

$$٢٤ + ٢٩ = ٥٣ \quad ٢٩ + ٢٤ = ٥٣$$

وقس على هذا

(٩٥) واذا اريد تحصيل مقدار حاصل جمع حدود متوالية عددية كالتوالية

ب . ج . د . هـ . و . ز . ح . ط . ث . ي ل

يحصل بانبناء على ما تقدم

$$ع = ٤ + (٤ + ٢٢) + (٤ + ٢٢) + \dots + (٤ + ٢٢) + (٤ - ٢٢) = ٢٢$$

بالرمز بالحرف ع لمقدار حاصل جمع حدود متوالية المطلوب ولايجاد قانون مختصر عن هذا الوضع المتساوية المتقدمة بهاتين الصورتين

(15)

$$1 + (r-1) + (r-1)^2 + \cdots + (r-1)^{r-1} + (r-1)^r + r = 2$$

$$s + (s+r) + (s+r) + \cdots (s+r-j) + (s-j) + j = c$$

وجميع هاتين المنسأيتين طرفا الى طرف وملاحظة ان حاصل جمع كل حدين متصدين في الرتبة يؤزل الى $\frac{1}{2}$ ل يتصل

۲ = ۴ + ۱ مکرر با قدر عدد الحدود ای

$\epsilon = (1 + \delta) \cdot \epsilon$ ومنها يحدث

$$(r) \dots \dots \dots \frac{\partial(j+1)}{1} = 2$$

اعني ان حاصل جمع حدود متوالية تفاضلية يساوي ثمن حاصل جمع حدودها
الطرفية مكررة مرة عدد حدودها

وادوسع في القانون (٢) بدل اليلد الاخير ل مقداره الميين بمعادلة (١)
الالى

$$\frac{2(1-x)+2r}{2} = e$$

(٩٦) نحل المسائل المتعلقة بالبيانات العددية بواسطة القانونين (١) و (٢) وذلك انه اذا علم ثلاث كميات من الخمس a و b و c و d و e و f و g و h و i و j و k و l و m و n و o و p و q و r و s و t و u و v و w و x و y و z و aa و ab و ac و ad و ae و af و ag و ah و ai و aj و ak و al و am و an و ao و ap و aq و ar و as و at و au و av و aw و ax و ay و az و ba و bb و bc و bd و be و bf و bg و bh و bi و bj و bk و bl و bm و bn و bo و bp و bq و br و bs و bt و bu و bv و bw و bx و by و bz و ca و cb و cc و cd و ce و cf و cg و ch و ci و cj و ck و cl و cm و cn و co و cp و cq و cr و cs و ct و cu و cv و cw و cx و cy و cz و da و db و dc و dd و de و df و dg و dh و di و dj و dk و dl و dm و dn و do و dp و dq و dr و ds و dt و du و dv و dw و dx و dy و dz و ea و eb و ec و ed و ee و ef و eg و eh و ei و ej و ek و el و em و en و eo و ep و eq و er و es و et و eu و ev و ew و ex و ey و ez و fa و fb و fc و fd و fe و ff و fg و fh و fi و fj و fk و fl و fm و fn و fo و fp و fq و fr و fs و ft و fu و fv و fw و fx و fy و fz و ga و gb و gc و gd و ge و gf و gg و gh و gi و gj و gk و gl و gm و gn و go و gp و gq و gr و gs و gt و gu و gv و gw و gx و gy و gz و ha و hb و hc و hd و he و hf و hg و hh و hi و hj و hk و hl و hm و hn و ho و hp و hq و hr و hs و ht و hu و hv و hw و hx و hy و hz و ia و ib و ic و id و ie و if و ig و ih و ii و ij و ik و il و im و in و io و ip و iq و ir و is و it و iu و iv و iw و ix و iy و iz و ja و jb و jc و jd و je و jf و jj و jh و ji و jj و jk و jl و jm و jn و jo و jp و jq و jr و js و jt و ju و jv و jw و jx و ji و jj و jk و jl و jm و jn و jo و jp و jq و jr و js و jt و ju و jv و jw و jx و ji و jj و jk و jl و jm و jn و jo و jp و jq و jr و js و jt و ju و jv و jw و jx و ji و jj و jk و jl و jm و jn و jo و jp و jq و jr و js و jt و ju و jv و jw و jx و ji و jj و jk و jl و jm و jn و jo و jp و jq و jr و js و jt و ju و jv و jw و jx و ji و jj و jk و jl و jm و jn و jo و jp و jq و jr و js و jt و ju و jv و jw و jx و ji و jj و jk و jl و jm و jn و jo و jp و jq و jr و js و jt و ju و jv و jw و jx و ji و jj و jk و jl و jm و jn و jo و jp و jq و jr و js و jt و ju و jv و jw و jx و ji و jj و jk و jl و jm و jn و jo و jp و jq و jr و js و jt و ju و jv و jw و jx و ji و jj و jk و jl و jm و jn و jo و jp و jq و jr و js و jt و ju و jv و jw و jx و ji و jj و jk و jl و jm و jn و jo و jp و jq و jr و js و jt و ju و jv و jw و jx و ji و jj و jk و jl و jm و jn و jo و jp و jq و jr و js و jt و ju و jv و jw و jx و ji و jj و jk و jl و jm و jn و jo و jp و jq و jr و js و jt و ju و jv و jw و jx و ji و jj و jk و jl و jm و jn و jo و jp و jq و jr و js و jt و ju و jv و jw و jx و ji و jj و jk و jl و jm و jn و jo و jp و jq و jr و js و jt و ju و jv و jw و jx و ji و

وهنا نجد ولا يشتمل على حل المائل العشر المقدمة ذكر ناهما لمن يريد
معرفة ذلك

• (٢٨) •

• (مسائل يطلب حلها من الطلبة) •

(٩٧) الأولى ان يطلب تعيين الحد الاول وعدد الحدود من متوالية عددية اساسها ٨ وحدها الأخير ١٨٥ وحاصل جمعها ٣٤٥٠.
الثانية ان يطلب ادخال تسعة اوساط عددية بين اى حدين من المتوالية

٢ . ٥ . ٨ . ١١ . ١٤ . ١٧

الثالثة ان يطلب معرفة عدد طابور مثلث صفه الاول ثمانية والثنان ثمان والثالث ثلاثة وهكذا الى صف يكون عدد أبقاره مساويا
الرابعة ان يطلب ايجاد حاصل جمع حدود المتوالية الفردية

١ . ٣ . ٥ . ٧ . ٩ . ١١ . ١٣ . ١٥

الخامسة ان يراد ترميل طريق بعيدة عن تل رمل بمقدار ٤٠ ميتر وقد عملت عقابسة ذلك فوجد انه يلزم لترميلها ثمن مائة عرباته كل منها بعيدة عن مجاورتها بستة امتار بشرط ان يكون موضع العربات الاولى على بعد من التل يساوى ٤٠ مترا وان ترجع العربات الاخيرة الى التل الذى شخصت منه والمطلوب معرفة عدد الامتار التى يقطعها سواق العربات فى ترميل الطريق المذكورة

السادسة راجل يقطع عشرة فراسخ فى اليوم الواحد وفارس يقطع فى اول يوم ثلاثة فراسخ ويزيد سيره فى كل يوم عن سابقه فرسخين سارا فى آن واحد والمطلوب معرفة عدد الايام التى تغضى من ابتداء سيرهما الى نقطة تلاقيهما والمسافة التى يقطعها كل منهما

• (فى المتواليات التقسيمية اى الهندسية) •

(٩٨) كلمة متسلسلة مركبة من جملة حدود متوالية خارج قسمة احدها على سابقه ثابت وكل حد منها مساو لسابقه مضروباً فى كمية ثابتة تسمى متوالية والكمية الثابتة تسمى اساس المتوالية

ويعتضى هذا التعريف تكون المتوالية تصاعدياً او تنازلياً بحسب اساسها اى بحسب كونه اكبر من الواحد او اصغر منه فحينئذ تكون المتوالية

٣ : ٦ : ١٢ : ٢٤ : ٤٨ : ٩٦ تصاعدي

والتوالي

١ : ٤ : ١٦ : ٦٤ : ٢٥٦ : ١٠٢٤ تنازلي

ويلاحظ بها كالتلفظ بالتوالي العددية وكل متوالية هندسية وضع هكذا

١ : ٤ : ١٦ : ٦٤ : ٢٥٦ : ١٠٢٤

فإذا رمز بالحرف m لإسماها وبالحرف n لحدها الأخير المسبوق

بحدود عددها $1 - 2$ فنحصل

$$1 - 2 \quad 4 - 3 \quad 16 - 4 \quad 64 - 5 \quad 256 - 6 \quad 1024 - 7$$

وحيث أن القانون $1 - 2$ هو $1 - 2$ (١) مشتق على

الكميات الأربع $4 - 3$ و $16 - 4$ و $64 - 5$ و $256 - 6$ يمكن تعيين أحدها بحركة

اثنان لاخرى فذن ~~يكون~~ الحد الأخير من متوالية هندسية مساويا

لحاصل ضرب الحد الأول في الأساس مرفوعا لدرجة مساوية لعدد الحدود

السابقة

فإذا أريد تعيين الحد الثامن من المتوالية

١ : ٤ : ١٦ : ٦٤ : ٢٥٦ : ١٠٢٤

فنحصل $1024 \times 2 = 2048 \times 2 = 4096$ وهو الحد الثامن

المطلوب

وإذا أريد تعيين الحد الثاني عشر من المتوالية

١ : ٤ : ١٦ : ٦٤ : ٢٥٦ : ١٠٢٤

$$\left(\frac{1}{2} \times 64 \right) = \frac{32}{1} = \frac{1}{8} = \frac{1}{1024} \text{ وهو الحد الثاني عشر المطلوب}$$

وبسبب عمل القانون $1 - 2$ لأدخل جملة حدود عددها m بين

كيتين معلومتين $4 - 3$ و $16 - 4$ لتركيب من شكل متوالية هندسية وحيث أن

عدد الحدود المدخلة m يكون عدد حدود المتوالية المراد تحصيلها

ع (١-٣) = $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$ (١-٣) ومنها يستخرج

$$ع = \frac{(1-3)}{2} = -1 \dots \dots \dots (٣)$$

وإذا وضع $\frac{1}{2}$ بدل الحد الأخير الذي مقداره $\frac{3}{2}$ في المعادلة (٣) نؤول إلى

$$ع = \frac{1-3}{2}$$

اعني ان مجموع حدود متوالية هندسية يساوى خارج قسمة باقى طرح الحد الاول من حاصل ضرب الحد الأخير في الأساس على باقى طرح الواحد من الأساس.

(١٠١) جميع المسائل المتعلقة بالمتواليات الهندسية تحل بواسطة المعادلتين (١) و (٣) المحتويتين على انكسبات $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{2}$ و $\frac{5}{2}$ و $\frac{7}{2}$ و $\frac{9}{2}$ إذا علم منها ثلاث لأنه حينئذ يمكن تعيين الاثنتين الأخرى. إلا ان أغلب حل المسائل المذكورة يتوقف على قواعد تأتي كما لو كان أحدها المجهولين $\frac{5}{2}$ الذى هو عدد حدود المتوالية فإنه يؤل الأمر إلى حل معادلة مستقلة على اس مجهول وكما لو كانت المجهولان $\frac{3}{2}$ و $\frac{5}{2}$ فإنه يؤل الأمر إلى حل معادلة ذات درجة مساوية لعدد حدود المتوالية

وإذا استعملت المعادلة (٢) الحادثة من المعادلة (٣) بواسطة قسم آل الأمر إلى حل معادلة ذات درجة مساوية $\frac{5}{2} - 1 = 1$

وإذا كان الأساس $\frac{3}{2} = 1$ استعملت المعادلة (٢) بدل المعادلة (٣)

لأنه يحدث من المعادلة (٣) المجموع $ع$ مقدار غير معين أى أن $ع =$

وأما المعادلة (٢) فإنها تحدث له مقداراً محدوداً أى أن $ع = \frac{5}{2}$

وقد تقدم ان المقدار غير المعين ينشأ عن وجود مضروب مشترك في المضروب

المشترك في المعادلة (٣) هنا هو $(١ - \frac{3}{2})$ انظر (٥١)

(١٠٢) متى كانت الأساس المرموز له بالحرف $\frac{3}{2}$ أصغر من الواحد

اي كسر اصار من المتوالية تنازلية فينتد قانون (٣) يكتب هكذا

$$ع = \frac{1}{\frac{1}{ع} - 1} = \frac{ع}{ع - 1}$$

فيشاهد من فرض $ع > 1$ انه اذا ازداد العدد $ع$ شيا فشيئا نقصت

الكمية $\frac{ع}{ع - 1}$ كذلك وعليه فيمكن اخذ العدد $ع$ كبيرا بحيث يكون

المقدار $\frac{ع}{ع - 1}$ اقل من كل كمية معلومة فعلى ذلك كليا اخذت حدود

اكبر من الحدود المتعاقبة للمتوالية بالابتداء من الحد الاول قرب مقدار

$ع$ من $\frac{ع}{ع - 1}$ فاذن يمكن اخذ حدود كافية ليكون حاصل جمعها مختلفا

عن $\frac{ع}{ع - 1}$ بقدر ما يراد وعليه فيقال ان نهاية حاصل جمع جملة حدود من

المتوالية التنازلية بالابتداء من الحد الاول تكون مساوية للكسر $\frac{ع}{ع - 1}$

فاذا كان عدد حدود المتوالية لانهايا كان حاصل جمعها مساويا $\frac{ع}{ع - 1}$

اي ان حاصل جمع حدود متوالية تنازلية عدد حدودها لانهايا يساوي خارج

قسمة حدها الاول على فاضل الواحد والاساس

(١٠٣) ويمكن تعيين هذا الحاصل من اول الامر بفرض المتوالية

التنازلية التي عدد حدودها لانهايا هكذا

ج : د : هـ : و : الخ ومنها يحدث

$د = د$ و $هـ = د + و$ و $و = د + هـ$ و الخ

وبجميع هذه المتساويات طرفا الى طرف يتصل

$د + هـ + و + الخ = (د + د + هـ + الخ) د$

وحيث ان الطرف الاول من هذه المتساوية يساوي حاصل جمع حدود

المتوالية المذكورة ماعدا اخذ الاول اي يساوي $ع - د$ وان

لطرف الثاني يساوي مجموع حدودها مكررا بقدر الاساس $د$ اي يساوي

$د$ يكون $ع - د = د$ او $ع = (١ + د) د$ ومنها يحدث

$$ع = \frac{د}{١ - د}$$

وهذه المجموعة حدود المتوالية المذكورة لانه اذا اجريت عملية القسمة

• (١٤٥) •

حصة الواهب الاول $\frac{1}{81} + \frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{2}{3}$

وحصة الواهب الثاني $\frac{1}{81} - \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3}$

وحيث زاد للواهب الاول $\frac{1}{81}$ من العبد يرجع للواهب الثاني منه ثلثه
اي $\frac{1}{243}$ وبناء عليه تكون

حصة الواهب الاول $\frac{1}{243} - \frac{1}{81} + \frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{2}{3}$

وحصة الواهب الثاني $\frac{1}{243} + \frac{1}{81} - \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3}$ وهكذا

فقد نتا من هذه الية الدور والتسلسل قاذن تكون حصة كل منهما مساوية
لقاضل حاصل يجمع متواليتين تاريليتين غير نهايين فتواليتا الواهب الثاني

$\frac{1}{3} : \frac{1}{27} : \frac{1}{243} : \dots$ الخ و $\frac{1}{9} : \frac{1}{81} : \frac{1}{729} : \dots$ الخ

ومنها ينتج ان حصته الحقيقية مساوية $\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$ فتتدال
الثالث الذي هو حصة الواهب الثاني الى ربع وبناء عليه تكون حصة الواهب

الاول ثلاثة ارباع

فلتعين حصة الواهب الاول يجرى العمل المذكور في تعيين حصة
الواهب الثاني

الثالثة احد المصورين عنده ٨ صوير يبيعها فدفع له في شكل واحدة
١٥٠ غر شامرة واحدة ثم دفع له في ادناها ثمن قدره خمسة غروش وفيما
فرقه عشرة غروش وهكذا بتضعيف الثمن الى الثامنة والمراد معرفة اربع
البيعين

(فالجواب ان البيع الثاني اربع)

ارابعة برميل من الخل يحتوى على مائة اقه صاير يؤخذ منه كل يوم اقه
واحدة ويضاف اليه اقه ماء بدلها والمطلوب معرفة عدد مرهات تكرار هذا
العمل حتى لا يبقى من الخل الا الربع

(فالجواب انه لابد من تكرار تقعر ١٨٣ مرة)

• (في النوع زيمت) •

(١٠٦) قبل الشروع في انقراض العسومية للوفاريتم واجتماعه

- في الصيغ الحسائية تذكر نظرية هي ان جميع الاعداد تنبع من قوى عدد موجب اكبر من الواحد أو أصغر منه بيان ذلك ان يقال
- اولا ، اذا رمز بالرمز ∞ لعدد ثابت موجب اكبر من الواحد وكونت القوى المتوالية ∞ و ∞^2 و ∞^3 الخ يحدث من ذلك بجهل اعداد لا تزال اخذت في الزيادة الى غير نهاية ومتقاربة من بعضها كلها تقاربت اسس هذه القوى من بعضها ومن هنا يؤخذ انه اذا رمز بالرمز ∞ و ∞^2 و ∞^3 لكميتين متغيرتين وفرضت المعادلة $\infty = \infty^2$ وفرض للمتغير ∞ بجهل مقادير متقاربة من بعضها من ابتداء الصفر الى ∞ ∞ كان للمتغير ∞ بجهل مقادير متقاربة من بعضها بحيث اذا زاد ∞ بكيفية متوالية من ابتداء الصفر الى ∞ اخذ ∞ جميع المقادير من الواحد الى ∞ واذا فرض للمتغير ∞ مقادير سالبة بان ∞ كان $\infty = \infty^2$ الت المعادلة المتقدمة الى

$$\infty = \infty^2 = \frac{1}{\infty}$$

- واذا فرض ان ∞ ياخذ مقادير من ابتداء الصفر الى ∞ فان ∞ ياخذ مقادير من ابتداء الواحد الى ∞ وحيث ياخذ $\frac{1}{\infty}$ مقادير من ابتداء الواحد الى $\frac{1}{\infty}$ اي الى الصفر وثانيا اذا فرض ان ∞ يدل على عدد دون الواحد سين الكسر $\frac{1}{\infty}$ (بفرض ∞ عددا اكبر من الواحد) تؤن المعادلة $\infty = \infty^2 = \frac{1}{\infty}$ الى $\infty = \left(\frac{1}{\infty}\right)^2 = \frac{1}{\infty^2}$ فاذا اخذ ∞ جميع المقادير من ابتداء الصفر الى ∞ اخذ $\frac{1}{\infty^2}$

جميع الأعداد من الواحد إلى ∞ فينته تكون جميع مقادير ∞ محصورة بين الواحد والصفر وإذا أخذ المتغير ∞ مقادير من ابتداء الصفر إلى ∞ أخذ ∞ جميع الأعداد المحصورة بين الواحد والصفر فينته يكون للمتغير ∞ جميع الأعداد من ابتداء الواحد إلى ∞

(١٠٧) حيث تفرانه يكن تكوين جميع الأعداد من اقوى المتنوعة لعدد ثابت يطلق اسم لوغاريتم هذه الأعداد على اساس اقوى متنوعة المذكورة المساوية لجميع الأعداد بالتناظر وحينئذ يكون كل مقدار للمتغير ∞ في المعادلة $\infty = \infty$ لوغاريتم مقدار المتناظر منه من مقادير ∞ (بفرض ∞ عددا موجبا ويسمى اساس الجذبة بـ ∞ رئيسية) و- وضع $\infty = \infty$ لوغا ∞

(١٠٨) اذا فرض ان ∞ و ∞ و ∞ و ∞ الخ رموز لأعداد ∞ و ∞ و ∞ و ∞ الخ رموز لوغاريتماتها بالنسبة لـ ∞ اساسها ∞ حدث

$$\begin{aligned} \infty &= \infty \text{ و } \infty = \infty \text{ و } \infty = \infty \text{ ومنها يحدث} \\ \infty &= \infty \text{ و } \infty = \infty \text{ و } \infty = \infty \\ \text{ومن هنا يؤخذ بقنطري قاعدة لاسس} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \infty \times \infty &= \infty \text{ و } \infty \times \infty = \infty \text{ و } \infty \times \infty = \infty \\ \text{لوغا } \infty &= \infty \text{ و } \infty = \infty \text{ و } \infty = \infty \text{ و } \infty = \infty \\ \text{لوغا } \infty &= \infty \text{ و } \infty = \infty \text{ و } \infty = \infty \text{ و } \infty = \infty \end{aligned}$$

(12)

مُتَنَزِّلٌ مِّنَ السَّمَاءِ نَزَلَ بِهِ الرُّسُلُ أَنذِرْنَاهُم بِآيَاتِهِ ۚ لَقَدْ جَاءَهُمْ بَيِّنَاتٌ مِّنْ رَبِّهِمْ ۚ قُلْ إِنِّي أَخْشَىٰ عَذَابَ رَبِّي ۚ إِنَّكَ أَنتَ السَّادِقُ ۚ

+ لوغا صه + لوغا صه + الخ

لوغاصی = لوغاص - لوغاصه

لوغاص = م لوغاص و لوغاص = لوغاص

وهذه المساءيات الاربع تستبطل منها قواعده

الاولى ان لوغار يتم حاصل ضرب يكون مساويا ل مجموع لوغار ثقات مضاريه

ثانية ان لوغاريت خارج قسمة عددين يكون مساويا للوغاريت المقسوم
مطروحاً منه لوغاريت المقسوم عليه

الثالثة ان لو غاربت أي قوة لا ي عدد يكون مساويا للوغاريتم هذا العدد مضروبا في درجة القوة المثل كورة

الزايعة ان لو غاريتم جذراي عدد يكون مساو لو غاريتم هذا العدد مقسوما
على درجة الجذر المذکور

ويؤخذ من القاعدة الثانية ان لوغاريتم اى كسر يكون مساويا للوغاريتم
بسطه مطروحا منه لوغاريتم مقامه ونجى من القاعدة ثلث الاولى ان لوغاريتم
الحد الرابع من متسلسلة يكون مساويا لمجموع لوغاريتمى الوسطين مطروحا منه
لوغاريتم الحد الاول

(١٠٩) يؤخذ من تعريتي الماوغا ريم ومما تقدم في (١٠٦)

اولا ان الاساس في كل جملة ثنائية يكون مساويا للواحد ويكون
لثلاثة اواحد مساويا لتسفر

وثانياً أن الأساس إذا كان أكبر من الواحد كانت لوغاريتمات الأعداد التي فوق الواحد موجبة ولوغاريتمات الأعداد التي دون الواحد سالبة ولوغاريتم

2000

الأعداد التي ليست من القوى العجيبة لعدد ١٠. فإنها تتعين بعدد اعشاري واما الجزء العجيب لوغاريتم عددا كبيرا من الواحد فإنه يحتوى على عدة من الاساد مناوية لعدد ارقام هذا الجزء ناقصا واحدا لانا اذا رمزنا لعدد ارقام الجزء العجيب بالرمز k كان العدد محصورا بين 10^{k-1} و 10^k وبناء على ذلك يكون لوغاريتم محصورا بين $k-1$ و k وحيث ان k يكون من بكم من اساد عددها $k-1$ و k ومن بكم اعشاري اقل من الواحد ولذا اطلق على الجزء العجيب من كل لوغاريتم اسم العدد الياني • (في المنسم اللوغاريتمى) •

المنسم اللوغاريتمى لعدد هو لوغاريتم مقلوب هذا العدد ويقال لاحد العددين مقلوب الاخر متى كان حاصل ضربيهما مساويا للواحد فمضروب 3 او $\frac{1}{3}$ يقال لكل منهما مقلوب الاخر وعليه اذا رمز بالرمز a لعدد مقلوبه $\frac{1}{a}$ يحدث

$$1 = \frac{1}{a} \times a$$

وباختذ لوغاريتم كل من الطرفين يحدث

$$\text{لوغا } a + \text{لوغا } \frac{1}{a} = \text{لوغا } 1 = 0 \quad \text{ومنها يؤخذ}$$

$$\text{لوغا } \frac{1}{a} = - \text{لوغا } a$$

اعني ان المنسم اللوغاريتمى لعدد يساوى لوغاريتم العدد بعلامة مخالفة لعلامته وحيث ان الجدول اللوغاريتمى لا تحتوى الاعلى لوغاريتمات الاعداد العجيبة يلزم لايجاد لوغاريتمه $\overline{\text{كسر}}$ ان تطبق عليه القاعدة المتقدمة في (٨ - ١) ومتى كان الكسر المقروض اقل من الواحد $\overline{\text{كسر}}$ يمكن تعيين لوغاريتمه السالب على وجهه يكون جزؤه الاعشارى موجبا ولذا يلزم ان يضاف بالاختيار على لوغاريتم البسط عدد من الاتحاد حتى يتيسر ان يطرح منه لوغاريتم المقام ويطرح هذا العدد من الباقي مثال ذلك ان يكون لوغاريتم البسط 1.3249082 ولوغاريتم المقام 3.0842761 فيلزم ان يطرح

اللوغاريتم الثاني من الاول بعد ان يضاف اليه ٢ فيصير ١.٠٧٦٥٣١٠٠٠
وحيث انه يلزم ان يطرح ٣ من هذا الباقي يكتب هكذا

$$1.076531000 - 3 = 0.076531000$$

والعلامة — الموضوعة فوق العدد الباقي لا تتعلق بغيره

فإذا اردت تغيير المقدار ١.٠٧٦٥٣١٠٠٠ بآخر مكافئ له الا انه سالب

$$\text{شوهذان } 1.076531000 - 3 = -0.076531000$$

$$-2 - (1 - 0.076531000) = -2.923468999 \text{ وهذا}$$

التحويل يؤخذ من طرح واحد من المقدار المطلق للعدد الباقي وطرح الرقم
الاول من بين الجزء الاعشارى من ١٠ وباقي الأرقام الاعشارية

من ٩

سويلزم تحويل لوغاريتم سالب بالكلية الى مقدار جزؤه الاعشارى موجب
(اى الى المقام اللوغارىتمى) ان يجرى على الجزء الاعشارى من اللوغاريتم
السالب ما جرى عليه في الحالة السابقة ويضاف الى العدد الباقي وحده لان

$$-2.923468999 - 2 = -4.923468999$$

$$-4.923468999 + 3 = -1.923468999$$

وإذا اردت ضرب اللوغاريتم ١.٠٧٦٥٣١٠٠٠ في عدد صحيح كعدد
٤ مثلاً فان حاصل الضرب يكتب هكذا

$$1.076531000 \times 4 = 4.306124000 \text{ أو } 4.306124000 - 4 = 0.306124000$$

كان اللوغاريتم مركباً من عددين باقى سالب وجزء اعشارى موجب وريد
قسمته على عدد صحيح نرى ان يؤخذ من خارج قسمة عدد باقى على وجهه

يكون الباقي موجباً مثل ذلك نرى ان ٤.٣٠٦١٢٤٠٠٠ على ٣ فيكون
خارج قسمة ٧ على ٣ هو ٢ وباقى ١ وخارج قسمة

٣. والباقي + ٢. وبإدانة العجل يحدث ٧٧٦٥٢١٤ ٣. وهو الناتج المطلوب.

(١١٣) يؤخذ من القواعد المتقدمة في (١٠٨) أن

$$\text{لونا} (10 \times 10) = \text{لونا} + 10 \text{ لونا} = 10 \text{ لونا} + 10 \text{ لونا} + 10 \text{ لونا}$$

$$\text{لونا} \left(\frac{10}{10} \right) = \text{لونا} - 10 \text{ لونا} = 10 \text{ لونا} - 10 \text{ لونا}$$

ومن هنا يتبع أن لوغاريتم حاصل ضرب عدد في القوى العنصرية لعدد ١٠ أو خارج قسمته عليه يكون مساوياً للوغاريتم هذا العدد مضافاً إليه أو مطروحاً منه اتحاد عينة بقدر درجة القوة العنصرية للعدد ١٠.

وحينئذ يسهل معرفة العدد البياني للوغاريتم عدد اعشاري أصغر من الواحد لأنه إذا رُمز بالرمز ج لعدد الاضمار الموجودة بين الشرطة وأول رقم معنوي يوجد من عيبتها كان العدد المفروض أصغر من $\frac{1}{10}$ واحد أكبر من

$$\frac{1}{10} + 1 \text{ وحينئذ يكون لوغاريتم هذا العدد معصورياً بين } -1 \text{ و } -(1+1)$$

أعني أن هذا اللوغاريتم يكون مساوياً $-(1+1)$ مضافاً إليه جزء اعشاري موجب أو مساوياً -1 مضافاً إليه جزء اعشاري سالب ومن هنا يتبع

أولاً أنه متى كان الجزء الاعشاري للوغاريتم عدد اعشاري أصغر من الواحد موجباً كان عدده البياني مساوياً للعدد الدال على مرتبة أول رقم معنوي يوجد من بين الشرطة من العدد المفروض

وثانياً أنه متى كان اللوغاريتم سالباً بالكلية كان عدده البياني أقل بواحد من العدد الدال على مرتبة أول رقم معنوي يوجد من بين الشرطة في العدد المفروض وعلى ذلك يكون العدد البياني الموجب أو السالب للوغاريتم دالاً على أعظم أحاد العدد الذي ينسب إليه هذا اللوغاريتم

في استعمال

استعمال الجدول اللوغاريتمية

في العمليات الحسابية

(١١٤) استعمال هذه الجدول في العمليات الحسابية يرجع الى مسألتين (الاولى) ان يكون المعلوم عدد والمطلوب إيجاد لوغاريتمه (الثانية) ان يكون المعلوم لوغاريتم عدد والمطلوب إيجاد هذا العدد ويكتفى في ذلك ان نشرح جدول اللوغاريتمات المعرب مطبقا عليه المسئلتان المذكورتان فنقول

• (في شرح جدول اللوغاريتمات المعرب واستعماله) •

(١١٥) هذا الجدول يتكون من ثلاثة اجزاء احدها يشتمل على لوغاريتمات الاعداد من الواحد الى ١٠٠٨٠ وهو عبارة عن اربع وثلاثين صحيفة كل صحيفة مشتملة على ستة صفوف رأسية معنونة على التوالي بالنطق 'عدد' و'انساب' اي لوغاريتمات وكل صف مقسوم الى ثمانية اقسام كل منها يشتمل على خمسة اعداد والنصف المعنون بلقطة انساب يوجد ثلثا نصف المعنون بلقطة اعداد عن يساره بحيث يرى كل عدد من الاول موضوعا على يسار العدد المنسوب اليه من الثاني وجميع اعداد النصف المعنون بلقطة انساب مركب من ثمانية ارقام اولها من جهة اليسار والعدد البياني والارقام السبعة الباقية هي الجزء الاشاري من اللوغاريتم وجميع الاعداد البيانية هي الارقام الموضوعية في كل صف تحت العلامة الموضوعية تحت نقطة انساب في رأس كل صف من جهة اليسار ولنشرح في تطبيق الجدول المذكور على المسألتين المذكورتين فنقول

• (المسئلة الاولى العملية) •

(١١٦) اذا كان المطلوب تحصيل اللوغاريتم المنسوب لعدد معلوم فندرس اولا اذا كان العدد المعلوم صحيفا وصفر من ١٠٠٨٠ ثم نبحث عنه في النصف المعنون بلقطة اعداد ويؤخذ هذا الذي نرى يوجد على يساره من النصف المعنون بلقطة انساب فيكون هذا العدد هو اللوغاريتم

المطلوب

مثال ذلك ان يدون العدد المقروص ٤٥١٧ فيصير عنه في الصعوف المعنوية بلفظة اعداد فيشاهد انه العدد الثاني من اعداد القسم الثامن من الصف الثالث المعنون بلفظة اعداد من (صفحة ٣٩) وحيث يكون العدد ١-٨٥٤٨٥٠٣ الموضوع على يسار ٤٥١٧ هو اللوغاريتم المطلوب الذي يوضع هكذا لوغا ٤٥١٧ = ٢,٦٥٤٨٥٠١ فينتد يكون

لوغا ١٠ = ١,٠٠٠٠٠٠٠٠ و لوغا ٣١٥ = ٢,٤٩٨٣١٠٦
ولوغا ١٤ = ١,١٧٦٠٩١٣ و لوغا ٨٩١٥ = ٣,٩٥٠١٢١٣
وثانيا اذا كان العدد المعلوم صغيرا وكبر من ١٠٠٨٠ لزم تحويله الى عدد اعشاري محصور بين ١٠٠٠ و ١٠٠٨٠

مثال ذلك ان يكون المطلوب تعيين لوغاريتم العدد ١٨٩٣٦٧ فيقال حيث ان $١٨٩٣٦٧ = ١٠٠ \times ١٨٩٣,٦٧$ يكون لوغاريتم العدد ١٨٩٣٦٧ بمقتضى (بند ١١٣) مساويا للوغاريتم العدد ١٨٩٣,٦٧ مضافا اليه العدد ٢ وبناء على ذلك يكتفى لتعيين اللوغاريتم المطلوب ان يعين لوغاريتم العدد ١٨٩٣,٦٧ بهذه المئاة وهي ان يقال

حيث ان العدد ١٨٩٣,٦٧ محصور بين ١٨٩٣ و ١٨٩٤
يكون لوغاريتمه محصورا بين اللوغاريتمين الجدولين ٣,٢٧٧١٥٠٦ و ٣,٢٧٧٢٨٠٠ المتسويين للعددين ١٨٩٣ و ١٨٩٤ ثم
انه يلزم ايجاد الكمية منه التي يراد اضافتها الى اللوغاريتم ٣,٢٧٧١٥٠٦ المتسوب للعدد ١٨٩٣ ليتكون من ذلك لوغاريتم العدد ١٨٩٣,٦٧
بان يؤخذ الفرق ٢٢٩٤-٠٠٠ بين اللوغاريتمين الجدولين المتسويين للعددين ١٨٩٣ و ١٨٩٤ ويقال ان نسبة الفرق ١ بين العددين ١٨٩٣ و ١٨٩٤ المتواليين الحاصرين بينهما العدد ١٨٩٣,٦٧ الى الفرق ٦٧-٠ بين العدد المعلوم والعدد ١٨٩٣,٦٧ كنسبة الفرق ٢٢٩٤-٠ بين اللوغاريتمين الجدولين المتسويين للعددين

(100)

• الحاصرين بينهما العدد المعلوم الى الفرق • بين اصغر التوابعيتين
الجدولين والتوابعيتين المطلوبه اعني

١ : ٢٦٧ :: ٢٢٩٤ : ٠٠٠٠٠٠
ثم يضاف مقدار من الى اللوغاريتم ٣,٢٧٧١٥٠٦ التوب
للعدد ١٨٩٣ فالجوع ٢,٢٧٧٣٠٤٣ يكون لوغاريتما للعدد
١٨٩٣,٦٧ فينتد بكون لوغاريتم العدد ١٨٩٣٦٧ هو
٢,٢٧٧٣٠٤٣ وهذه المتابة تعين لوغاريتم اى عدد صحيح

وَنَالَا اِذَا ارَادَ تَصْيِيْنُ لَوْ غَارِيْتُمْ كَسْرَ اَعْتِيََادِي لَزِمَ اَنْ يَطْرَحَ لَوْ غَارِيْتُمْ الْبَطْ
 مِنْ لَوْ غَارِيْتُمْ اَلْمَقَامَ كَمَا تَقْدُمُ فِي (بَنْدِ ۱۰۸)

لكن اذا كان الكسر اكبر من الواحد اجريت عملية الطرح كما ذكر فيكون
الباقى هو اللوغاريتم المطلوب واذا كان الكسر دون الواحد نرم ان بطرح
لوغاريتم البسط من لوغاريتم المقام ثم يقرن الباقي بعلامة - فيكون
الناتج لوغاريتم الكسر المقروض

تثبيته • اذا كان المنطروح اكبر من المطروح منه وجب ان يطرح الاصغر
من الاكبر ثم يقرن الباقي بعلامة — فيناء على ذلك يكون

لونا $\frac{10}{7} = ۰.۳۳۰۹۹۳۳$ و لونا $\frac{7}{10} = ۰.۳۳۰۹۹۳۳$
 و راجعاً اذا كان المطلوب تعيين لوغاريتم عدد اعشاري يتل في حيث
 العدد الاعشاري يكافئ كسر اعتيادي يسعه عدد صحيح حادث من تقسيم
 العدد المقروض من الشرطة ومقامه وجد متبوع بحد واحد اعشاري كعدد
 الارقام الاعشارية الموجودة على يمين الشرطة فينتهي ما تقر في تعيين
 لوغاريتم كسر اعتيادي ينقسم تصحيل لوغاريتم عدد اعشاري في لوغاريتم
 العدد الصحيح الحادث من حذف الشرطة من العدد المذكور من جهة
 آحاد بقدر الارقام الاعشارية الموجودة في العدد المذكور في لوغاريتم
 الواحد المتبوع بحيلة العدد وهو عدد الاعشار المذكورة في (بند ۱۱۳)

لكن اذا كان العدد الاعشارى المقروض اكبر من الواحد كان لوغاريمته موجبا فاذا كان المطلوب متلاتعين لوغاريمته العدد ١٨٩٢٦٧ رزم ان يبحث عن اللوغاريم ٤٣ - ٢٧٧٣٠٥ المتسوب للعدد ١٨٩٢٦٧ وي طرح منه الرقم ٤ فيكون الباقي ٤٣ - ٢٧٧٣٠٥ هو اللوغاريم المطلوب واذا كان العدد الاعشارى المقروض اصغر من الواحد كان لوغاريمته سالبا فاذا كان المطلوب متلاتعين لوغاريمته العدد ١٨٩٢٦٧ رزم ان يقطع النظرى مبدأ الامر عن الشرطة ويبحث عن لوغاريمته العدد ١٨٩٢٦٧ فيكون ٤٣ - ٢٧٧٣٠٥ وحيث ان العدد المعلوم مركب من ثمانية ارقام اعشارية يلزم لتعصيل لوغاريمته ان يطرح من اللوغاريم ٤٣ - ٢٧٧٣٠٥ الرقم ٨ وبناء على ذلك يكون العدد ٤٣ - ٢٧٧٣٠٥ - ٨ هو اللوغاريم المطلوب ويلزم لايجاد الباقي المذكور ان يطرح ٤٣ - ٢٧٧٣٠٥ من ٨ ويقرن الباقي بعلامة - فيكون الناتج - ٢٧٢٢٦٩٥٧ هو لوغاريمته العدد ١٨٩٢٦٧ رزم .
ويمكن ايضا كافي (بند ١١٢) تحويل اللوغاريم - ٢٧٢٢٦٩٥٧ الى لوغاريمته عدده البيانى سالب فقط بعلامة ان لوغا ١٨٩٢٦٧ رزم .
$$٤٣ - ٢٧٧٣٠٥ + ٥ = ٨ - ٢٧٧٣٠٥$$

$$٤٣ - ٢٧٧٣٠٥ + ٣ = ٤٦ - ٢٧٧٣٠٥$$

والعلامة - الموضوعة فوق العدد ٣ تدل على انه سالب فقط

• (المسئلة الثانية العملية) •

(١١٧) اذا علم لوغاريمته وكان المطلوب تعيين العدد الذى ينسب اليه يقال اولاً اذا كان اللوغاريم المعلوم موجبا فكان العدد المتسوب اليه اكبر من الواحد وحيث يكون العدد البيانى بعد ان يضاف اليه واحد دالا كما فى (بند ١١٢) على عدد ارقام الجزء الصحيح من العدد المتسوب الى اللوغاريم المعلوم

اذا قرر ذلك يقال اذا كان العدد البيانى لوغاريمته معلوم قدره ٣ كان

العدد المنسوب اليه هذا اللوغاريتم محصورا بين ١٠٠٠ و ١٠٠٠٠٠
ولتحصيل هذا العدد يبحث عن اللوغاريتم المعلوم في الصفوف المعنونة بالنقطة
انساب فان وجد اللوغاريتم المذكور في الجدول كان العدد المنسوب اليه
موضوعا على عينه في الصف المعنونة بالنقطة اعداد

وبناء على ذلك يشاهدان اللوغاريتمات ٣٢٦٥٦٠٩٨٢ و ٣٢٧٧١٥٠٦
و ٣٢٧٣٨٠٠ و ٣٢٧٣٨٠٠ منسوبة للاعداد ٤٥٣٠ و ١٨٩٢
و ١٨٩٤

واذا كان اللوغاريتم المعلوم الذي عدده الباقي ٣ ليس موجودا في الجدول
لزم حصره بين لوغاريتمين متوالين بجدولين منسويين لعددتين معينين
متوالين فيكون اصغر هذين العددين هو الجزء الصحيح من العدد الاشاري
المنسوب اليه اللوغاريتم المعلوم

واما الجزء الاشاري المنسوب للعدد المطلوب فيتعين بهذه الكيفية وهي ان
يقال نسبة الفرق بين اللوغاريتمين الجدولين الحاصرين بينهما اللوغاريتم
المعلوم الى الفرق بين اللوغاريتم المعلوم واصغر اللوغاريتمين الجدولين كنسبة
واحد الى الجزء الاشاري من المنسوب اليه اللوغاريتم المعلوم
ومقدار من المستخرج من هذه النسبة يكون في العادة ميّنا ثلاثة
ارقام فاذا كان المعلوم اللوغاريتم ٣٢٧٧٣٠٤٣ مثلا

شاهد في الجدول ان هذا اللوغاريتم محصور بين لوغاريتمين ٣٢٧٧١٥٠٦
و ٣٢٧٧٣٨٠٠ المتسويين لعددتين ١٨٩٢ و ١٨٩٤
وبناء على ذلك يكون الجزء الصحيح من العدد المطلوب هو ١٨٩٣ واما
الجزء الاشاري من هذا العدد فيلزم تعيينه ان يبحث في مبدأ الامر عن
الفرق ٢٢٩٤ و ٠٠٠٠ بين لوغاريتمين ١٨٩٢ و ١٨٩٤
ثم عن الفرق ١٥٣٧ و ٠٠٠٠ بين لوغاريتم المعلوم وصغر لوغاريتمين
الجدولين ثم يوضع النسبة

موجبا ومساويا للرقم ١ ثم يثبت من العدد المنسوب الى هذا اللوغاريتم الجديد وتقدم الشرطة منازل جهة يسار هذا العدد بقدر الاسد التي اضيفت الى العدد ليبقى فاذا اريد ايجاد العدد الذي لوغاريتمه $\overline{٢٧٧٣.٤٣}$ مثلا

$$\overline{٢٧٧٣.٤٣} - ٣ = \overline{٢٧٧٣.٤٣} + ٣ = \overline{٢٧٧٣.٤٣}$$

وبناء على ذلك اذا اضفنا الرقم ٦ لـ $\overline{٢٧٧٣.٤٣}$ المتوازيتم المعالوم صار الناتج

$$\overline{٢٧٧٣.٤٣} (لان \overline{٢٧٧٣.٤٣} - ٣ = ٣ بعد اضافة رقم$$

$$٦ اليه يصير \overline{٢٧٧٣.٤٣} + ٦ = ٣) ثم يثبت من العدد$$

الذي يقب اليه هذا الناتج فيشاهد انه $\overline{١٨٩٣٦٧}$ ثم تقدم الشرطة

ستة منازل جهة اليسار (لأننا اضفنا الرقم ٦ الى اللوغاريتم المقروص)

فيكون الناتج $\overline{١٨٩٣٦٧.٠٠}$ هو العدد المطلوب

(١١٨) هذا ما يتعلق بالجزء الاول وهو المنقول على لوغاريتمات الاسد

من ١ الى ١٠٠٨٠ واما الجزآن الاخيران فلم تصد ليركهما هما

لوقفهما على امور خاصة بعلم حساب المثلثات من اراد الوقوف على

حقيقتها فليسه بالاطلاع على العلم المذكور

١٦٦٦

(الباب الخامس)

في مسائل جعلها بقواعد هذا المختصر وتطبيقها عليها تتم من التلامذة وتقوى ملكتهم في هذا العلم وهي مرتبة بحسب ترتيب قواعد

• (مسائل قصص الدرجة الاولى) •

• (المسئلة الاولى) •

كومتان من القل محتورتان على ٣٤٤ قلة تزيد احدهما عن الاخرى بمقدار ٦٤ قلة فما يكون عدد القل الموجودة في كلتيهما .

فالجواب عن ذلك ان يفرض مـ عدد القل الموجودة في صغرى الكومتين فيكون مـ + ٦٤ عدد القل الموجودة في الكومة الكبرى فيناه على ما تقدم ينصل

$$م + م + ٦٤ = ٣٤٤ \text{ اى}$$

$$٢ م + ٦٤ = ٣٤٤ \text{ ومنها يستخرج}$$

$$م = ١٤٠ \text{ قلة وهو العدد الاصغر}$$

وحيث كان العدد الاكبر مساويا للكمية مـ + ٦٤ يكون مساويا للكمية ١٤٠ + ٦٤ المساوية للكمية ٢٠٤ بمعنى انه يوجد في احدى الكومتين ١٤٠ قلة وفي الاخرى ٢٠٤ وتحقق ذلك ان مجموعهما يساوى ٣٤٤ وقاضلها يساوى ٦٤

• (المسئلة الثانية) •

ثلاث قل عيار الاولى ١٢ بوصه والثانية ١٠ بوصات والثالثة ٨ وزنة الجميع ١٤٣ كيلوبراما لكن الاولى تزيد عن الثانية بمقدار ٢٢ كيلوبراما والثانية عن الثالثة بمقدار ٢٩ كيلوبراما فما تكون زنة كل قلة من القل الثلاث

فالجواب عن ذلك ان يقال اذا رمزنا بالحرف مـ زنة القلة التى عيارها ٨ بوصات فيكون مـ + ٢٩ زنة القلة التى عيارها ١٠ بوصات و مـ + ٢٢ + ٢٩ اى مـ + ٥١ زنة

(١٦١)

القلة التي عيارها ١٢ بوصة حيث كانت زنة الثلاث قلل تبلغ ١٤٣
كيلوجراما يحدث

$$٣٠ + ٣٠ + ٢٩ + ٣٠ = ١٤٣ \text{ أو}$$

$$٣٠ + ٣٠ = ٨٠ \text{ ومنها يستخرج}$$

$$٢١ = ٣٠$$

يعني ان زنة القلة التي عيارها ٨ بوصات يكون ٢١ كيلوجراما تكون
حينئذ زنة القلة التي عيارها ١٠ بوصات ٢٩ + ٢١ اي ٥٠
فكيلوجراما وزنة القلة الثالثة التي عيارها ١٢ بوصة ٥٠ + ٢٢
اي ٧٢ كيلوجراما وتحقيق ذلك ان زنة الثلاث قلل تساوي ١٤٣
كيلوجراما

• (المسئلة الثالثة) •

اذا كان المطلوب قسمة ٢١٣٧٥ خرطوشا على ثلاث فرق من العساكر
تكوها مناسبة للاعداد ٣ و ٥ و ١١ اي ان قوة الاولى على $\frac{1}{3}$ قوة
الثانية وعلى $\frac{1}{11}$ من قوة الثالثة

فالجواب عن ذلك ان يفرض ان ٣ عدد خرطوشين اللازمة لفرقة الاولى
و ٥ عدد خرطوشين الثانية و ١١ عدد خرطوشين لفرقة
الثالثة (وانما اخترنا هذه القروض لفرق الثلاثة لوجهين الاول ان ٣
عبارة عن $\frac{1}{3}$ العدد ٥ وعن $\frac{1}{11}$ من العدد ١١ و الثاني
تناسب هذه القروض مع الاعداد ٣ و ٥ و ١١) فينت كان مجموع
هذه الاجزاء الثلاثة يعادل ٢١٣٧٥ يحدث

$$٣ + ٥ + ١١ = ١٩ \text{ ي}$$

$$١٩ = ٢١٣٧٥ \text{ ومنها يستخرج}$$

$$١١٢٥ = \frac{٢١٣٧٥}{١٩}$$

وحينئذ يكون ما يخص فرقة د على ١١٢٥×٣ اي ٣٣٧٥
خرطوشا وما يخص فرقة ث على ١١٢٥×٥ اي ٥٦٢٥ وما يخص فرقة

١١ × ١١٢٥ اى ١٢٣٧٥ وتحقيق ذلك ان المجموع يساوى
 ٢١٣٧٥ وحال الطريقة اخرى للمحل هي
 ان يرمز بالحرف سـ لعدد خراطيش الفرقة الاولى فيكون $\frac{1}{11}$ هو
 عدد خراطيش الفرقة الثانية و $\frac{1}{11}$ عدد خراطيش الفرقة الثالثة ومن
 ذلك تحدث هذه المعادلة سـ + $\frac{1}{11}$ + $\frac{1}{11}$ = ٢١٣٧٥ وبحل
 هذه المعادلة واستخراج مقدار سـ منها يوجد سـ = ٣٣٧٥ خرطوشا
 فينتسذ يكون عدد خراطيش الفرقة الثانية ٥٦٢٥ وعدد خراطيش
 الفرقة الثالثة ١٢٣٧٥

• (المسئلة الرابعة) •

اذا كان المطلوب معرفة اللقطات التي يتلاقى فيها عقربا الساعات والدقائق
 لساعة ما

فالجواب عن ذلك ان يقال من الواضح ان تلاقى العقربين قد يقع وقت
 الغروب فينتسذ لا حاجة لتأخير والغرض انما هو البحث عن التلاقيات الاخرى
 المتتابعة الواقعة بعد التلاقى المذكور فنقول

يرمز بالحرف هـ المحيط بقامه وبالحرف سـ للمسافة التي قطعها عقرب
 الساعات من وقت الغروب الى وقت التلاقى الاول فيكون ١٢ سـ هي
 المسافة التي قطعها عقرب الدقائق في الوقت المذكور وهذه المسافة
 عبارة عن المحيط زائد المسافة سـ اعنى ان ١٢ سـ = هـ + سـ
 ويستتج من هذه المعادلة سـ = $\frac{1}{11}$ هـ وبما ان عقرب الساعات
 يقطع المحيط بقامه في مدة ١٢ ساعة يقطع المسافة $\frac{1}{11}$ هـ في $\frac{1}{11}$ من
 ساعة

الساعة اى في $\frac{1}{11}$ وينبذ على ذلك قطعات التقابلات المتتابعة

ساعة	ساعة	ساعة	ساعة	ساعة	ساعة
من وقت غروب	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{5}{11}$
ساعة	ساعة	ساعة	ساعة	ساعة	ساعة
$\frac{6}{11}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{11}{11}$

• (١٦٣) •

وهالك بعض مسائل بسيطة لثمن المبتدى اقتصرنا على بيان تنوع حلها
لتصديق ما يجده الطالب

• (المسئلة الاولى) •

رجل عمره ثمانية امثال عمر ولده ومجموع عمرهما ٣٦ سنة فما يكون عمر
كل منهما

فالجواب ان عمر الولد ٤ سنوات وعمر والده ٣٢ سنة

• (المسئلة الثانية) •

تليذ ان ذهب الى المكتب اخذ مجازاة له ٨ وان لم يذهب دفع عقابا له
٣٠ فبعد مضي ثلاثين يوما وجد معه ٣٠ فما يكون قدر ايام
البطالة وقدر ايام الشغل

فالجواب ان قدر ايام الشغل ١٥ يوما كقدر ايام البطالة

• (المسئلة الثالثة) •

قتلان ذنب احديهما ٣٦ رطلا وذنب الاخرى ٢٤ رطلا ومجموع قطريهما
٣١٥ ميليميترا وفاضلها ٢١ ميليميترا فما مقدار كل من القطرين
فالجواب ان قطر الاولى ١٦٨ ميليميترا وقطر الاخرى ١٤٧

• (المسئلة الرابعة) •

تاجر اشترى مقدار من الخطب وباعه فاكسب مبلغا قدره ٢٠٠٠ مقبض
انه ربح في كل مائة ١٠ من المبلغ المبيع فما يكون رأس ماله الذي
اشترى به الخطب المذكور

فالجواب ان رأس المال ١٨٠٠٠

• (المسئلة الخامسة) •

مختلطة قدره ١٧ رطلا مركب من ١٥ رطلا من سائر ذوات من
الكبريتية فما يكون الكمية التي يوزن ضد الثانية من رطلين من سائر ذوات
بحيث يكون موجودا في كل ١٧ رطلا من الثانية من رطلين من
الكبريت فقط

• (١٦٤) •

فالجواب عن ذلك انه يلزم اضافة ٥١ رطلًا من ملح البارود
ولتذكر مسائل مطبقة على حل معادلتين قاطريتين فأكبر

• (المسئلة الاولى) •

بجنان من الدانات احدهما مركبة من ١٢ دانة حيار كل منها ٨ ومن
١٨ دانة حيار كل منها ٦ ووزنة المجموع ٩٢٥ و ٤٦٩ كيلوجراما
والاخرى مركبة من ٢٠ دانة حيار كل منها ٨ ومن ١٥ حيار كل منها
٦ ووزنة المجموع ٩٨٧ و ٦٠٦ كيلوجراما فتكون وزنة كل دانة منها
فالجواب عن ذلك ان يرسم بالحرف م وزنة الدانة التي حيارها ٨
وبالحرف ص وزنة الدانة التي حيارها ٦ فتحدث هاتان المعادلتان

$$١٢ م + ١٨ ص = ٩٢٥ و ٤٦٩$$

$$٢٠ م + ١٥ ص = ٩٨٧ و ٦٠٦$$

ولاستخراج م من هاتين المعادلتين تحذف م منها بان يستخرج
من الاولى

$$م = \frac{٩٢٥ - ٤٦٩}{١٢}$$

$$م = \frac{٩٨٧ - ٦٠٦}{٢٠}$$

ومن الثانية

وبتسوية هذين المقدارين ببعضهما تحدث هذه المعادلة

$$م = \frac{٩٢٥ - ٤٦٩}{١٢} = \frac{٩٨٧ - ٦٠٦}{٢٠} \text{ اى } \frac{٩٢٥ - ٤٦٩}{١٢} = \frac{٩٨٧ - ٦٠٦}{٢٠}$$

$$٧٠٤٨٨٧٥ - ١٨٠ م = ١٠٩٢٥٠٧٦٦ - ٣٦٠ م ومنها$$

$$\text{يستخرج } م = \frac{٢٨٧٦٠٨٩١}{١٨} = ٢١٥٣٨ \text{ كيلوجراما}$$

فاذا وضعنا بدل الحرف م مقداره المستخرج في المعادلة الاولى دار
الجهولين يحدث

$$م = \frac{٩٢٥ - ٤٦٩}{١٢} = \frac{٢١٥٣٨ \times ١٢ - ٤٦٩}{١٢} = \frac{٢٥٨٨٤٥١ - ٤٦٩}{١٢} = ١٧٤٨$$

كيلوجراما

• (المسئلة الثانية) •

مدفع حياره ١٦٠ مركب من نحاس وقصدير وزنه ٦٤٠ و ٢٠١
كيلوجراما أو ٢٠١ و ٦٤٠ جراما وجمعه ٢٢٣ دسميترا مكعبا

نحاس

بخر من ان زنة الديس ميتر المكعب من النحاس يساوي ٩٢٥٠ جراما
وزنة الديس ميتر المكعب من القصدير يساوي ٧٣٢٠ جراما تكون زنة
كل من النحاس والقصدير

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف α لعدد الديسمترات المكعبة من النحاس
وبالحرف β لعدد الديسمترات المكعبة من القصدير فيحدث بالنظر
لديسمترات المكعبة هذه المعادلة $\alpha + \beta = ٢٢٣$ ويحدث
بالنظر للزنة ٩٢٥٠ $\alpha + ٧٣٢٠ \beta = ٢٠١٠٦٤٠$

ثم يستخرج من المعادلة الاولى $\alpha = ٢٢٣ - \beta$ ومن الثانية
 $\alpha = \frac{٢٠١٠٦٤٠ - ٧٣٢٠\beta}{٩٢٥٠}$ ومن هاتين المعادلتين يستخرج
 $\frac{٢٠١٠٦٤٠ - ٧٣٢٠\beta}{٩٢٥٠} = ٢٢٣ - \beta$ أو

$$\beta = \frac{٥٢١١٠}{١٩٣} = ٢٧$$

فعلى ذلك يوجد في المبلغ المذكور ٢٧ ديسمتر مكعب من القصدير
و ٢٢٣ - ٢٧ اي ١٩٦ ديسمتر مكعب من النحاس

فاذا ضرب ٩٢٥٠ جراما في ١٩٦ وجد ان زنة نحاس ١٨١٣٠٠٠
جراما واذا ضرب ٧٣٢٠ جراما في ٢٧ وجد ان زنة القصدير
١٩٧٦٤٠ جراما وتحقيق ذلك ان زنة المجموع ٢٠١٠٦٤٠ جراما

• (المسئلة الثالثة) •

مائة اقة من بارود المدافع مكونة من ملح اسارود وكبريت و ٣٥ بشرط ان
ثلاثة امثال زنة ملح السارود تعادل زنة ١٣ نعم مرة مضاعفة عليها خمسة
امثال زنة الكبريت وان خمسة امثال زنة ملح تعادل زنة كبريت ٣٧ مرة
هذه شروط مناسبة امثال زنة خمسة ان تكون زنة كل من ملح ثلاث

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف α زنة الملح بالحرف β زنة الكبريت
من زنة الكبريت كانت بالحرف γ زنة نعم كانت فيحدث أولا

$$\alpha + \beta + \gamma = ١٠٠$$

• (١٦١)

ومن الشرط الاول $٣٠٠ = ٥ + ١٢ ع$

ومن الشرط الثاني $٥٠٠ = ٣٧ + ٧ ع$

ويستخرج منه من الاولى والثانية والثالثة يحدث

$$٣٠٠ = ١٠٠ - ٣٠٠ + ١٢ ع$$

$$٣٠٠ = ١٢٣ + ٣٠٠ - ١٢٣ + ١٢ ع$$

$$٣٠٠ = ٣٧ - ٣٧ + ٧ ع$$

وبقسوة اول مقدار بشان مقدار ثم يثالث مقدار للجهول منه يحدث

$$٣٠٠ = ١٢٣ + ٣٠٠ - ١٠٠ - ٣٠٠ + ١٢ ع$$

$$٣٧ - ٣٧ + ٧ ع = ١٠٠ - ٣٠٠ + ٣٧ - ٣٧ + ٧ ع$$

ويحذف المقامات يحدث على التوالي

$$٣٠٠ = ١٢٣ + ٣٠٠ - ٣٠٠ - ٣٠٠ + ١٢ ع$$

$$٣٧ - ٣٧ + ٧ ع = ٥٠٠ - ٣٧ + ٣٧ - ٣٧ + ٧ ع$$

وتحويل الحدود المشقة على الجهول منه الى طرف واحد يحدث

$$٣٠٠ = ٣٠٠ - ١٢٣ + ١٢ ع \quad ٣٧ - ٣٧ + ٥٠٠ = ٣٧ - ٣٧ + ٧ ع$$

$$٣٠٠ = ١٧٧ + ١٢ ع$$

$$٣٧ - ٣٧ + ٥٠٠ = ٣٧ - ٣٧ + ٧ ع$$

وتقسوة مقدارى منه ببعضها يحدث معادلة فتوى على الجهول ع -

فقط يستخرج منها $١٢ \frac{١}{٢} = \frac{١٧٧}{١٢} = ١٤ \frac{٣}{٤}$ وهو مقدار الجهول المذكور

وبوضع $١٢ \frac{١}{٢}$ بدل الجهول ع في اول مقدار الجهول منه يحدث

$$٣٠٠ = ٣٠٠ - ٣٠٠ + ١٢ \frac{١}{٢}$$

وبوضع $١٢ \frac{١}{٢}$ بدل كل من الجهولين منه و ع في اول مقدار الجهول

منه يحدث

$$٣٠٠ = ٣٠٠ - ٣٠٠ + ١٢ \frac{١}{٢}$$

فهذا تكون المائة اقمه من بارود المدافع مركبة من ٧٥ اقمه من ملح
البارود ومن $\frac{1}{4}$ ١٢ من الكبريت و $\frac{1}{4}$ ١٢ من النعم وبنام على ذلك قطع
البارود الداخلى فى تركيب بارود المدافع يكون $\frac{1}{8}$ المخلوط واما كل من
الكبريت والنعم فيكون $\frac{1}{8}$ المخلوط

وهالك مسائل من هذا القبيل يراد حلها من الطلبة

• (المسئلة الاولى) •

٢١٩ فرنكا يطلب عملها ٦٠ قطعة من المسكوكات قيمة بعضها ٥
فرنكات وقيمة البعض الاخر ٢ فرنكان فكم يلزم عمله من الصنف الاول
فكم يلزم عمله من الصنف الثانى
فالجواب انه يلزم عمل ٣٣ قطعة قيمة كل منها ٥ فرنكات و ٧
قطعة قيمة كل منها ٢ فرنكان

• (المسئلة الثانية) •

عربي فيها ٥٠ قلة عيار بعضها ١٢ اصبعاً وعيار البعض الاخر ١٠ اصابع
وزنة كل قلة من العيار الاول ٧٢ كيلو جراماً وزنة كل قلة من العيار الثانى
٥٠ كيلو جراماً وزنة مجموع اقل ٢٦٩٨ كيلو جراماً فما يكون عدد
القلل الموجود فى كل من النوعين
فالجواب عن ذلك ان عدد قلل العيار الاول ٩ قللات وعدد قلل العيار
الثانى ٤١ قلة

• (المسئلة الثالثة) •

٦٠٠ تليد يشغلون ربعة ادوار من مدرسة بشرط ان تكون عدد
تلاميذ الدور الاول ضعيف عدد تلاميذ الدور الرابع و مجموع تلاميذ الدور
الثانى والثالث يعادل مجموع تلاميذ الدور الاول والرابع و عدد تلاميذ
الدور الثالث $\frac{5}{9}$ تلاميذ الدور الثانى فكم يوجد من تلاميذ كل دور
الادوار الاربعة المذكورة
فالجواب عن ذلك انه يوجد ٢٠٠ تلميذ فى الدور الاول و ١٧٥ فى الدور
الثانى و ١٢٥ فى الثالث و ١٠٠ فى الرابع

• (المسئلة الرابعة) •

ثلاث صبر من خليط الغلال في شوتة واحدة كل مائة اوقه من الصبرة الاولى
تحتوى على ٨٠ اوقه من القمح و ١٢ اقة من الذرة و ٢٠ اقات من
الشعير وكل مائة اقة من الصبرة الثانية تحتوى على ٧٥ اقة من القمح
و ١٥ اقة من الذرة و ١٠ اقات من الشعير وكل مائة اقة من الصبرة
الثالثة تحتوى على ٦٠ اقة من القمح و ٢٠ اقة من الذرة
و ٢٠ اقة من الشعير فما يلزم اخذه من كل صبرة لتكوين صبرة رابعة
تسلك مائة اقة منها تحتوى على ٧٣ اقة من القمح و ١٥ من الذرة
و ١٢ من الشعير

فالجواب من ذلك ان ما يلزم اخذه من الصبرة الاولى ٥٠ اقة ومن
الثانية ٢٠ اقة ومن الثالثة ٣٠ اقة

• (مسائل تحمل بواسطة القواعد المقررة في الدرجة الثانية) •

• (المسئلة الاولى) •

من المقرر في علم الطبيعة ان الاجسام الساقطة تقطع مسافات مناسبة
للمربعات الازمنة الساقطة فيها فاذا قطع جسم ٤٥٠٩٠٤٥ امتار في مدة
سقوطه في اول ثانية فما يكون مقدار التواني اللازمة لسقوط الجسم المذكور
من ارتفاع قدره ١٣٢,٥٣٤٧ ميترًا

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف s لعدد التواني اللازمة لسقوط الجسم
من الارتفاع المعين فنصنف هذه المناسبة

$$٤٥٠٩٠٤٥ : ١٣٢,٥٣٤٧ :: ١ : s \quad \text{ومنها يستخرج}$$

$$s = \frac{١٣٢,٥٣٤٧}{٤٥٠٩٠٤٥} = \frac{١٣٢,٥٣٤٧}{٤٥٠٩٠٤٥} = ٢٧,٠٢$$

$$s = ٢٧,٠٢ \pm ٥,٢$$

ومقدار

ومقدارا سم معا يحققان المعادلة $\text{سم} = \frac{122,0347}{2,90625}$ واما المقدار
الموجب للجهول سم وهو ٢٥ توان فهو حل المسئلة

• (المسئلة الثانية) •

يمكن اعتبار الحزم اللازمة لتفاسك طابية كاسطوانات قائمة فاذا كان مقدار
من المواد كاف لصناعة ٢٥ حزمة قطر قاعدة كل منها ٣٢٥ ميليمتر
واريد حل المقدار المذكور ٣٦ حزمة طولها كطول حزم النوع الاول
فما يكون قطر كل حزمة من هذا النوع الاخير

فالجواب عن ذلك ان يرمن بالحرف سم قطر حزمة النوع الثاني وبالحرف سم
طجم المقدار المذكور فيكون $\frac{\text{سم}}{٢٥}$ هو حجم اسطوانة النوع الاول و $\frac{\text{سم}}{٣٦}$
حجم اسطوانة النوع الثاني ومن حيث ان نسبة مجرم الاسطوانات متحدة
الارتفاع الى بعضها كنسبة مربعات اقطار قواعدها كما هو مقرر في الهندسة
تحدث هذه التناسية

$$\frac{\text{سم}}{٢٥} : \frac{\text{سم}}{٣٦} :: (٣٢٥)^2 : \text{سم}^2$$

$$\frac{٣٦}{٢٥} : ١ : :: ١٠٥٦٢٥ : \text{سم}^2$$

فيقتد

$$\text{سم}^2 = \frac{١٠٥٦٢٥ \times ٢٥}{٣٦} = \frac{٢٦٤٠٦٢٥}{٣٦} \text{ ومنها يستخرج}$$

$$\text{سم} = \sqrt{\frac{٢٦٤٠٦٢٥}{٣٦}} = \frac{\sqrt{٢٦٤٠٦٢٥}}{٦} = \frac{١٦٢٥}{٦}$$

$$\pm \frac{٦٢٥}{٦} = \pm ٢٧٠,٨$$

وحيث يكون القطر المطلوب ٢٧١ ميليمتر تقريبا و ١ سم مع

• (المسئلة الثالثة) •

من المعلوم ان خزنة تهون سطوافة قائمة وقاعدة حزمة يوت لدى مخبره
 ١٢ اصبعاً ٣٢٥ ميليمتر مستطبة وان قاعدة حزمة يوت ١٠ ي

المسألة الثالثة

عياره ٨ اصابع تعادل ٢١٧ ميليمترًا ~~مكعبًا~~ فإذا كان قطر قاعدة
 الهون الاول ١٢٦ ميليمترًا أعني $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$ فيا يكون قطر الهون
 الثاني بقرض ان عني الثلثين واحد وان خزنة الهون الاول تسع
 اواق ط

١٦٩٣ جرام من البارود اي $\frac{1}{4}$ ٧ ٩ وان خزنة الهون الثاني تسع
 اوقية ط
 ٦٣٥ جرام من البارود اي $\frac{1}{4}$ ٢٠

فالجواب عن ذلك ان يرمن بالحرف $\frac{1}{8}$ للقطر المطلوب ويلاحظ ان نسبة
 هجوم الاسطوانات المصدة الارتفاع الى بعضها كنسبة مربعات اقطار
 قواعدهما وان نسبة هجوم خرز الهوان الى بعضها كنسبة زئات البارود
 المختوية عليه هذه الخزن الى بعضها فحدث هذه المتناسبة

$$١٦٩٣ : ٦٣٥ :: (١٢٦) : \frac{1}{8} \text{ اي}$$

$$\frac{1693}{126} : \frac{635}{126} :: 126 : \frac{1}{8} \text{ ومنها يستخرج}$$

$$\frac{126}{126} \times 126 = \frac{635}{126} \times 126 =$$

$$٧٧ \text{ ميليمتر} = ٠,٦١٢ \times ١٢٦ = ٠,٣٧٥ \times ٧٤,٧ \times ١٢٦$$

لهيئة يكون القطر المطلوب ٧٧ ميليمتر اي $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$ تقريباً

• (المسألة الرابعة) •

اذا كان ارتفاع الميل الداخلي لطاية استحكامات يعادل ٢٧٤ $\frac{1}{4}$ اي
 اقدام
 وقاعدته تعادل ٧٥٨ $\frac{1}{4}$ اي $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ اي ثلث الارتفاع
 يكون طول هذا الميل

جواب عن ذلك ان يرمن بالحرف $\frac{1}{8}$ لطول هذا الميل ويلاحظ ان

مربع طول الميل المذكور يعادل مجموع مربعي ارتفاعه وقاعدته كما هو مقرر
في الهندسة فيحدث

$$س^2 = (٢٠٢٧٤)^2 + (٠,٧٥٨)^2 \text{ اى}$$

$$س^2 = ٥,٧٤٥٦٤٠ \text{ ومنها يستخرج}$$

$$س = \sqrt{٥,٧٤٥٦٤٠} \pm = ٢,٣٩٧ \pm$$

فحينئذ يكون طول الميل المذكور ٢,٣٩٧

• (المسئلة الخامسة) •

بالعدد الذى اذا اضيف الى مربعه ١٣٢ يكون الناتج مساويا مقدار
هذا العدد ٢٣ مرة

فالجواب عن ذلك ان يرمن بالحرف س لهذا العدد قد حدث هذه المعادلة

$$س^2 + ١٣٢ = ٢٣ س \text{ ومنها يستخرج}$$

$$س^2 - ٢٣ س + ١٣٢ = ٠ \text{ ومنها يستخرج}$$

$$س = \frac{٢٣ \pm \sqrt{٢٣^2 - 4 \times ١٣٢}}{2} = \frac{٢٣ \pm ١١}{2}$$

واذا رمن هذا رى س بالحرفين س و س يكون

$$س = \frac{٢٣ + ١١}{2} = ١٧$$

$$س = \frac{٢٣ - ١١}{2} = ٦$$

فحينئذ كل من العددين ١٧ و ٦ يحقق منطوق المسئلة
• (المسئلة السادسة) •

الاي اشترى مقدارا من الخيل يبلغ ٤٥٠٠٠ غرض واخر اشترى مقدارا
من الخيل يزيد عدده عن عدد خيل الاول ١٥ حصانا
ببلغ قدره ٦٤٠٠٠ غرض يفرض ان ثمن الحصان الواحد من خيل

(١٧٢)•

الاولى الثانية من ثمن الحصان الواحد من خيل الاولى الاول يبلغ
قدره ٢٠٠ خرش فكم يكون عدد خيول كل الاى وكم يكون ثمن كل
حصان منها

فالجواب عن ذلك ان برمز بالحرف مـ لعدد خيل الاولى الاول فيكون
مـ + ١٥ عدد خيل الاولى الثانية و $\frac{٤٥٠٠٠}{مـ}$ ثمن كل حصان من
خيل الاولى الاول و $\frac{٦٤٠٠٠}{مـ + ١٥}$ ثمن كل حصان من خيل الاولى الثانية
فصحت هذه المعادلة

$$\frac{٤٥٠٠٠}{مـ} = \frac{٦٤٠٠٠}{مـ + ١٥} + ٢٠٠$$

فاذا حدثت المقامات ثم خضعت المعادلة وقسمت على مصكروا بالجهول
ذى الدرجة الثانية حدث

$$مـ^٢ + ١١٠ مـ = ٣٣٧٥ \text{ ومنها يستخرج}$$

$$مـ = \frac{-110 \pm \sqrt{110^2 + 4 \cdot 3375}}{2} = \frac{-110 \pm 170}{2} \text{ او } ٣٠$$

$$مـ = \frac{-110 \pm \sqrt{110^2 + 4 \cdot 3375}}{2} = \frac{-110 \pm 170}{2} \text{ او } ٦٤٠٠$$

$$مـ = \frac{-110 \pm \sqrt{110^2 + 4 \cdot 3375}}{2} = \frac{-110 \pm 170}{2} \text{ او } ١٣٥$$

ما مقدار مـ = ٢٥ فانه يكون عدد خيل الاولى الاول وبناء
على ذلك يكون العدد ٢٥ + ١٥ اى ٤٠ عدد خيل الاولى الثانية واما

مقدار مـ = ١٣٥ فانه يحقق للمعادلة فقط

• (المسئلة السابعة) •

ثلاث فرق من اقدمه الاشتغلت معاً في شغلة معينة اتمتها في ظرف ١٥
ساعة واما اذا اشتغلت كل واحدة منها على حدها فان الاولى
تستغرق اربعة ايام الزمان الذى تستغرقه الفرقة الثانية في اتمام الشغلة
اذا تكررة وان الثانية تستغرق قدر ما تستغرقه الفرقة الثالثة من

الزمن ناقصا ١٥ ساعة فكم يكون مقدار الزمن الذي تستغرقه كل مرة من هذه الفرق الثلاثة

فالجواب عن ذلك ان يرمن بالحرف سم للزمن الذي تستغرقه الفرق الثانية في اتمام الشغل المذكورة فيكون $\frac{1}{3}\text{سم}$ هو الزمن الذي تستغرقه الفرق الاولى ويكون $\text{سم} + ١٥$ هو الزمن الذي تستغرقه الفرق الثالثة واذا قدرنا بضايق مقدار الشغل بالعدد ١ يكون $\frac{1}{3}\text{سم}$ هو مقدار الشغل في الفرق الاولى في ساعة واحدة و $\frac{1}{3}\text{سم}$ مقدار شغل الفرق الثانية في ساعة واحدة و $\frac{1}{3}\text{سم}$ مقدار شغل الفرق الثالثة في ساعة واحدة قصدت هذه المعادلة

$$\frac{1}{3}\text{سم} + \frac{1}{3}\text{سم} + \frac{1}{3}\text{سم} = ١ \text{ سم}$$

$$\frac{75}{\text{سم}} + \frac{1}{\text{سم}} + \frac{1}{\text{سم}} = ١ \text{ سم}$$

$$٧٥ \text{ سم} + ١١٢٥ \text{ سم} + ٦٠ \text{ سم} + ٩٠٠ \text{ سم} + ٦٠ \text{ سم} =$$

٤ سم + ٦٠ سم وبشعة جميع الحدود على سم وتحويل الحدود المتشابهة الى طرف واحد واختصارها وتغيير العلامات يحدث

$$٤ \text{ سم} - ١٣٥ \text{ سم} = ٢٠٢٥ \text{ سم}$$

$$\frac{٢٢٥}{٨} = \frac{٢٢٥}{٨}$$

حينئذ يكون مقدار المجهول

$$\text{سم} = ٤٥ \text{ سم} = \frac{1}{3}$$

ومقدار سم = ٤٥ هو عدد ساعات التي تستغرقها الفرق الثانية

في اتمام الشغل المعين فبناء على ذلك يكون ٢٦ عدد ساعات التي

تستغرقها الفرق الاولى لانها مذكورة في الشغل ٦٠ سم ساعة في

تستغرقها الفرق الثالثة

واما مقدار $\text{سم} = \text{سم} \frac{1}{2}$ ١١ فغير موافق لنطوق المسئلة فلا يكون
حلالها وانما هو محقق للمعادلة فقط

• (مسالتان يحلان بواسطة التناسب العددي) •

• (المسئلة الاولى) •

من المقرر في علم الطبيعة ان المسافات التي يقطعها الجسم الساقط المجرد عن
العوائق في ظرف اربع ثوان تكون متناسبة عدديا فاذا فرض ان قلة

استغرقت ٤ ثوان مدة سقوطها قطعت ٤٩٠٤ ر في الثانية الاولى

و ٧١٣ ر في الثانية الثانية و ٥٢٢ ر في الثانية الثالثة

فما دام المسافة التي قطعها القلة المذكورة في الثانية الرابعة

فالجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف سم للمسافة التي قطعها القلة في الثانية

ارابعة فنحصل هذه التناسبة

٤٩٠٤ : ٧١٣ : ٥٢٢ : سم ومنها يستخرج

$\text{سم} = ٧١٣ + ٥٢٢ - ٤٩٠٤ = ٢٣٥$ ر

٢٣٥ ر

فيكون $\text{سم} = ٣٤٣١$ ر هو المسافة المطلوبة وبناء على ذلك

تكون القلة قد قطعت ٧٨٤٧ ر في مدة الاربع ثواني

• (المسئلة الثانية) •

تضر قلة حيارها ٢٤ رطبا محصور بين ١٤٩٦ ر ميليمترا

و ٤٧٤٧ ر ميليمترا فما يكون التقدير المتوسط لهذه القلة

الجواب عن ذلك ان يرمز بالحرف سم لتقدير المطلوب فنحصل هذه

التناسبة

١٤٩٦ : ٢٤ : سم : ٤٧٤٧ ر

٤٧٤٧ : ٢٤ : سم : ١٤٩٦ ر

وهو مقدار القطر المتوسط المطلوب

• (مسائل تحمل بواسطة التناسب الهندسي) •

• (المسألة الأولى) •

ماهية جيش محتوي على ١٢٥٠٠ عسكري بلغت ٢٥٠٢٥٠ خرثا
فما مقدار ماهية جيش يحتوي على ١٨٧٥٠ عسكري بافرض ان ماهية
كل نفر من انصار الجيشين واحدة

فالجواب عن ذلك ان برمن بالحرف x ماهية الجيش الثاني فتكون

مناهية النفر الواحد منه $\frac{x}{18750}$ وحيث كانت ماهية النفر الواحد من
الجيش الاول $\frac{250250}{12500}$ حدثت هذه التساوية

$$\frac{250250}{12500} = \frac{x}{18750} \text{ ومن ذلك فحدثت هذه النسابة}$$

$$x = 18750 : 12500 :: 250250 : x$$

ومنها يستخرج $x = \frac{18750 \times 250250}{12500}$ اي

$$x = 370375 \text{ خرثا وهو ماهية الجيش الثاني وكن في كل واحد}$$

مقدار مجهول x من المعادلة

$$\frac{250250}{12500} = \frac{x}{18750} \text{ بدون مدخلة تناسب في ذلك}$$

• رتبة •

جيش محاصر عدده من رتبة تكسبه x في y من سفر و z
من الجيش المذكور في يوم t حصد u رتبة من v من
الاذم اعطاء من w من الجيش بحيث تكسبه x رتبة في y يوم
فالجواب عن ذلك ان برمن بحرف x رتبة من y من
لتنفر في z رتبة من t رتبة من u رتبة من v رتبة من w
في كل يوم جيش في u رتبة من v رتبة من w رتبة من x رتبة من y رتبة من z
يوم من المدة في المدة الاولى رتبة على رتبة x رتبة من y رتبة من z

٢٠ × ٢٧٥ وكذا يكون ٣٠ = درهمان مقدار المنصرف في كل يوم
من المؤنة في المدة الثانية ويكون بناء على ذلك ٣٦ × ٢٧٥ مقدار المؤنة
جميعها وحيث تحدث هذه المتساوية

$$٢٠ \times ٢٧٥ = ٣٠ \times ٣٦ \text{ أي}$$

$$٢٠ \times ٢٧٥ = ٣٠ \times ٣٦$$

ومنها تنج هذه المتساوية

$$٣٦ : ٢٠ :: ٢٧٥ : ٣٠ \text{ ومنها يستخرج}$$

$$٣٠ = \frac{٢٧٥ \times ٢٠}{٣٦} = ١٥٠٠ \text{ درهمان وهو ما يلزم اعطائه للنفر الواحد}$$

من المؤنة في المدة الثانية

وكان يمكن استخراج مقدار المجهول ٣٠ من اول الامر من المعادلة

$$٣٦ = ٢٠ \times ٢٧٥ \text{ بدون مدخلة للنسب في ذلك}$$

• (المسئلة الثالثة) •

اذا كان المطلوب قسمة عدد الى ثلاثة اجزاء مناسبة لثلاثة اعداد معلومة يقال •

اذا رز من بالحروف ٣٠ و ٣٠ و ٣٠ للاجزاء الثلاثة المطلوبة وبالحروف

٢ و ٣ و ٤ للاعداد الثلاثة المعلومة وبالحرف • للعدد المعلوم الذي

يراد تقسيمه يحدث بين ٣٠ و ٣٠ و ٣٠ هذا الارتباط $\frac{٣٠}{٣٠} = \frac{٣٠}{٣٠}$ وبين

٣٠ و ٣٠ هذا الارتباط $\frac{٣٠}{٣٠} = \frac{٣٠}{٣٠}$ فمن الارتباط الاول يستخرج ٣٠

$\frac{٣٠}{٣٠} =$ ومن الارتباط الثاني يستخرج ٣٠ $\frac{٣٠}{٣٠} =$ لحيث ان

$$٣٠ + ٣٠ + ٣٠ = ٩٠ \text{ يكون}$$

$$٣٠ + \frac{٣٠}{٣٠} + \frac{٣٠}{٣٠} = ٩٠ \text{ أي}$$

$$٣٠ = \frac{٩٠ \times ٣٠}{٣٠ + ٣٠ + ٣٠} \text{ ومنه يستخرج}$$

$$٣٠ = \frac{٩٠ \times ٣٠}{٩٠} \text{ وبناء على ذلك يكون}$$

$$٣٠ = \frac{٩٠ \times ٣٠}{٩٠} \text{ و}$$

$$٣٠ = \frac{٩٠ \times ٣٠}{٩٠} \text{ وهي مقادير الاجزاء المطلوبة}$$

وقد يحدث من هذه الاعداد ثلاث حالات متناسبة هي

•(١٧٧)•

$$\begin{aligned} & \text{م} + \text{د} + \text{ل} : \text{م} :: \text{م} : \text{م} \\ & \text{م} + \text{د} + \text{ل} : \text{د} :: \text{م} : \text{م} \\ & \text{م} + \text{د} + \text{ل} : \text{ل} :: \text{م} : \text{ع} \end{aligned}$$

فيشاهد منها أن نسبة مجموع الثلاثة أعداد المناسبة المعلومة إلى العدد الذي يراد تقسيمه كنسبة أحد الأعداد المعلومة إلى الجزء المطابق له الذي يراد استقراجه.

ويشاهد من ذلك جميعه أنه يلزم كثير من التناسبات وبناء عليه كثير من الضرب والقسمة بقدر ما يوجد من الأجزاء المناسبة التي يراد استقراجه بها لكن إذا فرض أن $\frac{\text{م}}{\text{د} + \text{ل}} = \text{ك}$ أمكن الاستغناء عن الاطالة المذكورة لانه بالفرض المذكور يكون

$\text{م} = \text{ك} \times \text{د} = \text{د} \times \text{ك}$ و $\text{م} = \text{ك} \times \text{ل} = \text{ل} \times \text{ك}$ اعني أنه بضرب خارج قسمة م على $\text{م} + \text{د} + \text{ل}$ في العدد الاول يتكون الجزء الاول الذي يراد استقراجه وبضربه في العدد الثاني يتكون الجزء الثاني وبضربه في العدد الثالث يتكون الجزء الثالث وقس على ذلك وتقل ذلك بمثالين فنقول

•(المثال الاول)•

المطلوب قسمة مبلغ ٢٣٧٤٠٠ من القروش على عشرة بلوكات بحيث تكون ابراء القسمة مناسبة لما ذكرنا من القسومات بنسبة ١ : ١ : ١ : ١ : ١ : ١ : ١ : ١ : ١ : ١
الملك الاول ١٠٠ والثاني ٩٦ والثالث ٩٢ والرابع ٩٠ والخامس ٨٥ والسادس ٨٢ والسابع ٨٠ والثامن ٧٨ والتاسع ٧٤ والعاشر ٧٠
البلوكات جميعها ٩٣١ يكون $\text{ك} = \frac{٢٣٧٤٠٠}{٩٣١}$
 $\text{ك} = ٢٥٥$ غرشا ويتبقى ما ذكر في مسندة من مئة غرش - قسمة ٢٥٥
 $\text{ك} = ٢٥٥$ غرشا المساوي ك في عدد مائة غرش : ترخيصه ينقسم
كل بلوك من القروش فينتد ينقسم البلوك الاول ٢٥٥ غرش و

•(١٧٨)•

٢١٤٨ والثالث ٦٦٥٢ والرابع ٢٢٠١ والخامس ٢٢٢٣٥٠ والسادس ٢٣٤٦ والسابع ٢٢٩٥٠ والثامن ٢٢٤٤ والتاسع ٢١٤٢ والعاشر ٢٠٤٠ غرشا ويمكن اجتناب كثرة الضرب واختصار الحسابات بكيفية ان يقال من حيث ان خارج قسمة ٢٣٧٤٠٠ غرشا على العدد ٩٣١ الذي هو مجموع عدد اثار البلوكات يعين ما يخص النقر الواحد يكون نيا على ذلك جدول هكذا

نقر	غرش
٠	٢٥,٥٠
٢	٥١,٠٠
٤	٧٦,٥٠
٦	١٠٢,٠٠
٨	١٢٧,٥٠
١٠	١٥٣,٠٠
١٢	١٧٨,٥٠
١٤	٢٠٤,٠٠
١٦	٢٢٩,٥٠

نرى شي غير ابراه عليه الجمع قط هكذا

لابلوك الاول	الابلوك الثاني
عدد الاثار ما يخص الابلوك	عدد الاثار ما يخص الابلوك
١٠	٩٠
٢٥٥٠	٢٢٩٥
٢٥٥٠	٢٢٩٥

وبيان ذلك ان يقال حيث ان عدد انظار الباول الاول يبلغ ١٠٠ قمر
 فتحصيل ما يخصه من الغروش يؤخذ ما يقابل العدد ١ من الجدول
 وتقدم الشرطة جهة المين خاتين فيتحصل ما يخصه وهو ٢٥٥٠ غرشا
 وكذلك لتحصيل ما يخص الباول الثاني يحل العدد ٩٦ الذي هو عدد
 انظاره الى ٩٠ + ٦ فاما لتحصيل ما يخص ٩٠ اي ٩ عشرات
 فيؤخذ من الجدول ما يقابل العدد ٩ وتقدم الشرطة فيه جهة المين خات
 واحدة فيكون ما يخص العدد ٩٠ قمر هو ٢٢٩٥ واما لتحصيل
 ما يخص العدد ٦ فيؤخذ من الجدول المبلغ ١٥٢ غرشا المقابل لعدد
 ٦ فيكون ٢٤٤٨ ما يخص ٩٦ قمر
 وعلى مثل ذلك يكون العمل في التماية باوكات الاخر

• (المثال الثاني) •

المطلوب تقسيم ٤٣٤٥٤٤ مترامكعبا براد حفرها لعمل خندق على
 الايات بحيث تكون ايراء القصة مناسبة لمقادير انظار الايات بفرض انه
 يوجد في الايات الاولى ١٨٥٠ قمر وفي الثاني ٢٠٠٣ وفي الثالث
 ١٠٢٧ وفي الرابع ١٥٠٠ وفي الخامس ١٧١٤ وفي السادس
 ٩٨٠ وفي السابع ١٩٢٥ وفي الثامن ٢٥١٨
 فحل ذلك يقال حيث ان مجموع انظار الايات جميعها يعادل ٣٥١٧
 تفريصكون $\frac{434544}{3517} = 12356$ مترامكعبا وهو ما يخص
 النفر الواحد وبناء على ذلك يركب هذا الخندق

• (١٨٠) •

قرى	يخصه	مترامكعباً
١	*	٣٤٠
٢		٧٤
٣		٩٦
٤		١٩٨
٥		١٦٠
٦		٠١٩٢
٧		٢٢٤
٨		٢٥٦
٩		٢٨٨

ومنه يستتبع كافي المثال المتقدم ما يخص كل الـ

وهذا الجدول الذي يعين به ما يخص كل الـ

غرة الـ عدد الاثارة ما يخص كل الـ من الامتار المكعبة

١	١٨٥٠	٥٩٢٠٠
٢	٢٠٠٣	٦٤٠٩٦
٣	١٠٢٧	٣٢٨٦٤
٤	١٥٠٠	٤٨٠٠٠
٥	١٧١٤	٥١٨٤٨
٦	٠٩٨٠	٣١٢٦٠
٧	١٩٢٥	٦١٦٠٠
٨	٢٤١٨	٨٠٥٧٦٠

وعمل ذلك يكون العمل فيما اذا اريد توزيع مبلغ من الغروش على عدة قرى
معومة بحيث تكون اجراء التوزيع مناسبة لتقدير اطياف هذه القرى
من كورة لتقسيم مقدار من المبيعات برادرمها او حقها لانشاء جسر
وزعة على عدة قرى بحيث تكون اجراء التقسيم مناسبة لتقدير اثار هذه

• (١٨١) •

القرى وقس على ذلك جميع الأمثلة التي تكون من هذا القبيل

• (المسئلة الرابعة) •

المطلوب تقسيم انعام قدره ٩٥٩٥ ر ٩٥ غرشا على خادمين بحيث يكون
جزأ القسمة مناسبين لما عيتميا ولادة مكنتهما في الخدمة بفرض أن ماهية
الاولى في السنة ٦٠٠٠ غرش ومدة مكنت في الخدمة ١٥ سنة وأن
ماهية الثاني في السنة ٥٠٠٠ غرش ومدة مكنته في الخدمة ٢٠
سنة

ولحل ذلك يقال حيث ان جزئي القسمة مناسبان لحاصل ضرب
الماهيتين في المدين اعني مناسبين ٦٠٠٠×١٥ اي ٩٠٠٠٠
و ٥٠٠٠×٢٠ اي ١٠٠٠٠٠ فيكون ما يخص الخادم الاول
يمتنى ما تقدم ١٥٤٥ ر ٤٥ غرشا وما يخص الثاني ٥٠٥٠ ر ٥٠
غرشا

• (المسئلة الخامسة) •

٣٠٠٠ عامل مصكثوا ٥٠ يوما في عمل قطعة استحكامات طولها
٢٠٠ متر وعرضها ٦ امتار وعمدة متران ولم يصككن شغلهم في اليوم
الواحد الا ٨ ساعات فما يكون مقدار العملة اللازمة لمعمل قطعة
استحكامات اخرى طولها ١٨٠ مترا وعرضها ٨ امتار وعمدة
٢٥٠ مترين في ظرف ٤٠ يوما بشرط ان لا يستعملوا في اليوم الواحد
الا ١٠ ساعات

فالجواب عن ذلك ان يقال حيث ان هذه المسئلة مركبة يجب حلها
ونظمها في سلك المتاعمة الثلاثية البسيطة بهو يل التثني عنتر عدد المحتوى
عليها منطوق المسئلة الى اربعة اعداد فقط وذلك ان يرمن بالحرف هـ من
لعدد المطلوب من العملة ثم يقال حيث ان ٣٠٠ عامل شغل ٥٠
يوما في كل يوم ٨ ساعات يكون $٣٠٠ \times ٨ \times ٥٠$ اي ١٢٠٠٠٠

• (١٦) •

(١٨٢)

هو عدد العملة الذين يعملون قطعة الاستحكامات الاولى في ظرف ساعة واحدة وكذا يقال حيث ان * سم عبارة عن عدد العملة الذين يعملون قطعة الاستحكامات الاخرى في ظرف ٤٠ يوما في كل يوم ١٠ ساعات يكون سم $\times ٤٠ \times ١٠$ اي ٤٠٠ سم هو عدد العملة اللازمة لعمل الاستحكامات الاخرى في ساعة واحدة و ~~ك~~كذا يقال حيث ان ~~م~~مكعب القطعة الاستحكامات الاولى يعادل ٤٠٠ $\times ٦٠ \times ٢$ اي ٤٨٠٠ متر مكعب وان ~~م~~مكعب القطعة الثانية يعادل ١٨٠ $\times ٨٠ \times ٢٥$ اي ٣٦٠٠ متر مكعب نزل المسئلة الى ابسط منها وهي ان يقال حيث ١٢٠٠٠٠٠ عامل اشتغلوا ٢٤٠٠ متر مكعب في ظرف ساعة واحدة وان ٤٠٠ سم عامل اشتغلوا ٣٦٠٠ متر مكعب في ظرف ساعة واحدة تحدث هذه التناسبة

$$٢٤٠٠ : ٣٦٠٠ :: ١٢٠٠٠٠٠ : ٤٠٠ \text{ سم ومنها}$$

$$\text{يستخرج } ٤٠٠ \text{ سم} = \frac{٣٦٠٠ \times ١٢٠٠٠٠٠}{٢٤٠٠} = ١٨٠٠٠٠٠$$

$$\text{و سم} = \frac{١٨٠٠٠٠٠}{٤٥٠} = ٤٠٠$$

لهيئتذ يلزم ٤٥٠ قاعلا لعمل قطعة الاستحكامات الاخرى في المدة المعينة في رأس السؤال

* (مسائل تحل بواسطة قواعد المتواليات العددية) *

- بملاحظة ما هو مقرر في علم الميكانيكا في قواعد تحرك سقوط الاجسام .
- من ان المسافة التي يقطعها جسم ساقط في زمن قدره $\frac{1}{2} g t^2$ تعادل $\frac{1}{2} g t^2$ يفرض ان g مقدار جذب الارض للاجسام وهو بمقتضى ما دلت عليه انجارب بياوتى ٨٠٨ و ٩٠٨ امتار في الثانية الواحدة في باريس و ٧٨٠ و ٩٠٨ امتار تقريبا في مصر تحل مسألتان الاولى والثانية من المسائل الالية
- * (المسئلة الاولى) *

ما الارضاع الذي تصل اليه بنسبة تستغرق في صعودها زمنا كالزم من الذي

• (١٨٣) •

تستغرقه في الهبوط يفرض أنها تستغرق في الصعود والهبوط زمان قدره
عشر ثوان

فالجواب عن ذلك أن يرمز بالحرف z للارتفاع المطلوب فيكون

$$z = \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2 \quad \text{حيث } t \text{ كان } z = 0 \text{ يكون}$$

$$z = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 5^2 = 122.5 \text{ متر وهو الارتفاع المطلوب}$$

• (المسئلة الثانية) •

جسم سقط من أعلى منارة ارتفاعها ٧٨ و ٤٦٤ مترًا فما يكون مقدار الزمن
الذي استغرقه الجسم المذكور في سقوطه

فالجواب عن ذلك أن يقال من المعادلة $z = \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2$ أي ٧٨ و ٤٦٤

$$78.464 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{78.464 \times 2}{9.8} = 16 \Rightarrow t = 4 \text{ أي } z = 78.464$$

أي أن الجسم المذكور يستغرق في سقوطه مقدارًا من الزمن قدره ٤
ثوان

• (المسئلة الثالثة) •

غيطاني كان يقي مائة شجرة موضوعة على استقامة واحدة وبعد كل منها عن
جواربها ٥ أمتار بشرط أن البئر الذي يؤخذ منه الماء على امتداد
خط الشجر بعيدًا عن الشجرة الأولى بمقدار عشرة أمتار فيكون
المسافة التي يقطعها الغيطاني المذكور في الذهاب والياباس في الماء شجرة
المذكورة

فالجواب عن ذلك أنه إذا توصل في منطوق المسئلة بشاهد أن غيطان المذكور
يقطع ٢٠ مترًا في سقي الشجرة الأولى و ٣٠ مترًا في سقي الثانية و ٤٠
مترًا في سقي الثالثة و ٥٠ مترًا في سقي الرابعة ولم جرت فبنا عليه تكون
المسافة التي يقطعها الغيطاني المذكور في سقي الشجر جميعه حاصل جمع حدود

• (١٨٤) •

متوالية عددية حدها الاول $a = ٢٠$ واساسها $r = ١٠$
 وعدد حدودها $n = ١٠٠$ ويستخرج هذا الحاصل من القانون

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$
 بوضع مقادير a و r و n بدلها
 قانون يحدث

$$S = \frac{20(1-10^{100})}{1-10} = \frac{20 \times 10^{100} - 20}{9}$$

$S = ٥١٥٠٠$ متر اي ٥١٥٠ ميلاحيترات اي ١٢ فرسخا
 قريبا

• (المسئلة الرابعة) •

خطاني قطع مسافة قدرها ١٣٧٥٠ مترا في ذهابه وايابه لسقي مقدار
 من الاشجار شجرة شجرة على استقامة واحدة وبعد \equiv كل منها من
 مجاورتها \circ اتمارولما وصل الى الشجرة الاخيرة لسقيها كان قد قطع
 مسافة قدرها ٥٢٠ ميترامبدءا البئر الذي كان يفترق منه الموضوع
 على استقامة الاشجار والمطلوب معرفة عدد الاشجار والبعد الذي بين البئر
 والشجرة الاولى

فالجواب ان يقال حيث ان المسافة التي قطعها الخطاني لسقي الشجر جميعه
 في الذهاب هي عين المسافة التي قطعها في الاياب تكون المسافة التي قطعها
 في الذهاب او الاياب مبنية بهذا المقدار $\frac{١٣٧٥٠}{٢}$ المساوي ٦٨٧٥ .
 متراك ذلك تكون المسافة التي قطعها لسقي الشجرة الاخيرة في الاياب
 او الذهاب مبنية بهذا المقدار $\frac{٥٢٠}{٢}$ المساوي ٢٦٠ وبناء عليه يتكون
 من المسافات المقطوعة بالتوالي لسقي الشجر جميعه متوالية عددية اساسها
 $r = ٥$ وحدها الاخير $a = ٢٦٠$ ومجموع حدودها $S = ٦٨٧٥$
 ويستخرج عدد حدودها n من هذا القانون

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

بوضع مقادير a و r و S

و

• (١٨٣) •

$$١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ = (١٠ + ١) = ١١$$

$$١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ + ١١ = (١١ + ١) = ١٢$$

$$١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ + ١١ + ١٢ = (١٢ + ١) = ١٣$$

ويجمع هذه المعادلات على بعضها حدا على حدا بالتناظر يحدث

$$١ - ٢ = ١ - ٢ + ٢ - ٣ + ٣ - ٤ + ٤ - ٥ + ٥ - ٦ + ٦ - ٧ + ٧ - ٨ + ٨ - ٩ + ٩ - ١٠ + ١٠ - ١١ + ١١ - ١٢ = ١ - ١٢$$

$$١ - ١٢ = ١ - ١٢$$

$$١ - ١٢ = ١ - ١٢$$

ومن هذه المعادلة يحدث

$$١ - ١٢ = ١ - ١٢$$

$$١ - ١٢ = ١ - ١٢$$

يسهل معرفة $١ - ١٢$ اي حاصل جمع مربعات حدود المتوالية متى علم

• و ١ و ١٢

واذا كان المطلوب إيجاد حاصل جمع مربعات حدود متوالية السرد

الطبيعي لا عسر ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦ و ٧ و ٨ و ٩ و ١٠ و ١١ و ١٢

(١) و (٢) فرض ان $١ = ١$ و $١٢ = ١٢$ وكذا $١ = ١$

فيحدث

$$١ = ١$$

• (١٨٧) •

$$\frac{3 + 2^2 + 2^2}{2} = 5 \text{ أو } ٥$$

$$\frac{(1+2)(1+2)2}{2 \times 2 \times 1} = 3$$

فهذا هو القانون المطلوب

في تطبيق هذا القانون على معرفة عدد التل الموجودة في إحدى الكومات للثلاث المعتاد تشكيلها في جوانات الطوبجية اذ من معلوم انهم يضعون التل والمقبر والبنب على ثلاث صور متنوعة وهي الكومة الهرمية ذات القاعدة المربعة والكومة الهرمية ذات القاعدة المثلثية والكومة الممتدة المستطيلة القاعدة

• (في حساب الكومة الهرمية ذات القاعدة المربعة) •

هذه الكومة تتركب من طبقات مربعة متزايدة التريبع بالابتداء من رأس الشكل الى قاعدته فاذا سلكت هذا الترتيب يكون في الطبقة الاولى ١ واحدة وفي الطبقة الثانية اربع قتل وفي الثالثة تسع قتل وفي اربعة ست عشرة قلة وفي الخامسة تسعة وعشرون وهكذا الى الطبقة التي نمرتها ١٠ فيها تحتوي على ١٠ قلة والطبقة الاخيرة يقال لها قاعدة الكومة ومجموع تس الكومة يكون حينئذ عبارة عن مجموع مربعات الاعداد الطبيعية بالابتداء من مربع العدد ١ الى مربع ١٠ (وهو يدل على عدد التل التي تحتوي عليها كل ضلع من القاعدة او كل حرف من اسف الكومة)

فاذا رمز بالحرف ع لعدد التل المحتوية عليها الكومة فيكون ينتهي

ما تقدم

$$\frac{(1+2)(1+2)2}{2 \times 2 \times 1} = 3$$

وهالجبذ ولا يمكن الاستغناء به عن القانون اذا كان عدد الطبقات ١٠ قاتل وهو محقق لقانون ايضا

١٨٨

حرف	طبقة	حكومة
١	١	١
٢	٤	٥
٣	٩	١٤
٤	١٦	٢٠
٥	٢٥	٣٠
٦	٣٦	٤١
٧	٤٩	٥٥
٨	٦٤	٧٠
٩	٨١	٩١
١٠	١٠٠	١٤٠
١١	١٢١	٢٨٥
١٢	١٤٤	٣٨٥

فالصف الاول يدل على عدد الطبقات او على عدد القلل الموجودة في كل حرف من الحكومة والصف الثاني يدل على عدد القلل الموجودة في كل طبقة والصف الثالث يدل على عدد انتل الموجودة في الحكومة بقضاءها

فان كان $10 = 10$ من لاءى انه يوجد عشر طبقات يؤل القانون
 ف $385 = 385$ كما هو مبين بالجدول

(في حساب الحكومة الهرمية ذات القاعدة المثلثية)

هذه الحكومة تتكون من طبقات مثلثية متزايدة السطح بالابتداء من الرأس الى القاعدة وكل طبقة عبارة عن مثلث متساوى الاضلاع طاعدا الطبقة الاولى ثنائيا لا تحتوى الا على قمة واحدة وضلع الطبقة الثانية يحتوى على قسرين وضلع ثالثة على ثلاث عن وضلع الرابعة على اربع وهكذا الى الطبقة في خمسة اذ ان ضعه لا يحتوى على ثمة وعدد انتل التي تحتوى عليها

• (٤٧) •

طبقة كانت عبارة عن مجموع حدود متوالية عددية حدها الأول ١ واساسها واحد كذلك وعدد حدودها يساوى عدد القلل التى يحتوى عليها كل ضلع من الطبقة المذكورة فحينئذ اذا كان ضلع الطبقة يحتوى على ٥ قلة فالطبقة تحتوى على $\frac{5+5}{2} = 5$ قلة أى $\frac{1}{2}(5+5)$ فاذا كانت ٥

تساوى على التعاقب ١ و ٢ و ٣ و ٤ الخ فالطبقات تحتوى على $\frac{1}{2}(1+1)$ و

$\frac{1}{2}(2+2)$ و $\frac{1}{2}(3+3)$ و $\frac{1}{2}(4+4)$ و $\frac{1}{2}(5+5)$

قله فاذا كان ع رمز العدد القلل الموجودة فى الكومة كان تقدم يتصل

$$ع = \frac{1}{2}(1+1) + \frac{1}{2}(2+2) + \frac{1}{2}(3+3) + \frac{1}{2}(4+4) + \frac{1}{2}(5+5)$$

$$= \frac{1}{2}(1+1+2+2+3+3+4+4+5+5)$$

$$= \frac{2(1+2)(1+5)}{2 \times 2 \times 1} = \frac{2+5}{2} + \frac{(1+5)(1+5)}{4}$$

ولتكوين جدول لهذه الكومة كما فعل ذلك بالكومة المتقدمة يقال

حيث كانت الطبقة التى ضامها يحتوى على ٥ قلة تتركب من صفر

مكونة متوالية عددية كالتواليه المذكورة من اعداد السرد الطبيعى ١ و ٢

و ٣ و ٤ و ٥ و ويكون عدد القلل الموجود فى هذه الطبقة

مساويا ١ + ٢ + ٣ + ٤ + + ٥ وبناء على ذلك

يتركب هذا الجدول

عدد قلل الطبقات.

$$1 = 1$$

فى الطبقة الاولى

$$3 = 2 + 1$$

فى الثانية

$$6 = 3 + 2 + 1$$

فى الثالثة

$$10 = 4 + 3 + 2 + 1$$

فى الرابعة

$$15 = 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

فى النونية

وبالتأمل في هذا الجدول يشاهد أن كل طبقة من طبقات هذه الكومة مكونة من إضافة الأعداد الطبيعية لبعضها على التعاقب إلى العدد الدال على عمرة الطبقة ويقتضى ذلك يحدث هذا الجدول

بـ ر فـ	طبقة	كـ و مـ
١	٠ ١	١
٢	٣	٤
٣	٦	١٠
٤	١٠	٢٠
٥	١٥	٣٥
٦	٢١	٥٦
٧	٢٨	٨٤
٨	٣٦	١٢٠
٩	٤٥	١٦٥
١٠	٥٥	٢٢٠
.	.	.
.	.	.
.	.	.
مـ	مـ	مـ

فالصف الأول يدل على عدد المقلل التي يحتوي عليها كل حرف من الحرف الكومة 'ا' وعلى عدد طبقات الكومة والثاني يدل على عدد المقلل الموجودة في كل طبقة وأعداد هذا الصف مكونة من إضافة الأعداد الطبيعية لبعضها على التعاقب من ١ إلى العدد الدال على عمرة الطبقة والصف الثالث يدل على عدد المقلل الموجود في الكومة بنسبها وأعداد هذا الصف مكونة من إضافة جميع أعداد الصف السابق لبعضها على التعاقب إلى العدد

الذي

١٢٢ (١٢٢) .

الذي نغرنه = عدد طبقات الكومة وحيث نذكر كل من هذه الحواصل يبين بالضرورة مجموع قلال الكومة بتمامها لانه عبارة عن مجموع طبقات هذه الكومة فاذن يوجد : ٢٢٠ قلة في الكومة التي عدد طبقاتها ١٠ وتحقق ذلك انه اذا وضع ١٠ بدل ٥ في القانون

$$ع = \frac{٥(١+٥)(١+٥)}{٢} \text{ آل للـ}$$

$$ع = \frac{١٢ \times ١١ \times ١٠}{٢} = ٢٢٠$$

وهذا ناتج عن الناتج المبين بالجدول

• (في حساب الكومة الممتدة المستطيلة القاعدة) •

هذه الكومة تتركب من طبقات مستطيلة متزايدة السعة بالابتداء من القمة الى القاعدة وان الطبقة الاولى منها تحتوي على صف واحد من القل فقط فاذا رز بالحرف م لعدد القل الكائنة فيه يكون في الطبقة الثانية ٢ صفان من القل في شكل صف منهما م + ١ قلة وفي الطبقة الثالثة ٣ صفوف في كل صف م + ٢ قلة وفي الطبقة الرابعة ٤ صفوف في كل صف منها م + ٣ قلة وفي الطبقة النونية ٥ صفات في كل صف منها م + ٤ قلة وبالبقاء على ذلك فعدد القل التي في الطبقة النونية يكون $٥(١ + م + ٥) = ٥ + م + ٥ - ٥$ فاذا وضع بدل ٥ اعداد ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦ و ٧ و ٨ و ٩ بالتوالي في هذا القانون يحدث

١ - ١ + م	في الطبقة الاولى
٢ - ٢ + م	وفي الثانية
٣ - ٣ + م	وفي الثالثة
٤ - ٤ + م	وفي الرابعة
٥ - ٥ + م	وفي الخامسة
٦ - ٦ + م	وفي السادسة
٧ - ٧ + م	وفي السابعة
٨ - ٨ + م	وفي الثامنة
٩ - ٩ + م	وفي التاسعة
١٠ - ١٠ + م	وفي العاشرة

(١٩٢)

واذا رمز بالحرف ع لحاصل جمع الطبقات يتكون

$$\begin{aligned}
 & \text{ع} = (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2) + (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2) + \dots \\
 & \text{ع} = \frac{(1+2)2}{2} + \frac{(1+2^2)(1+2)2}{4} + \frac{(1+2)2}{2} \times \text{م} = \\
 & = \frac{(1+2^2) + \text{م}}{(2-2^2+\text{م}^2)(1+2)2} =
 \end{aligned}$$

ولا يمكن وضع جدول لهذه الكومة إلا بعطاء م مقدار اختياريا فإذا
فرض ان $\text{م} = 10$ مثلا تحصل هذا الجدول

عدد الطبقات	مقدار الطبقات	الكومة
١	١٠	١٠
٢	٢٢	٣٢
٣	٣٦	٦٨
٤	٥٢	١٢٠
٥	٧٠	١٩٠
٦	٩٠	٢٨٠
٧	١١٢	٣٩٢
٨	١٣٦	٥٢٨
٩	١٦٢	٦٩٠
١٠	١٩٠	٨٨٠
...
لح	لح	لح

فالصف الاول يدل على عدد طبقات الكومة وعلى عدد كل ضلع جانبي وهذا
نصف أيضا يدل على رتب الطبقات في الكومة المعلومة والصف الثاني يدل
على عدد القل التي توجد في الطبقات المختلفة المكونة للكومة والصف المذكور

يتكون من القانون $(م + د - ١)$ المتقدم بفرض $م = ١٠$ واعطاء
 جميع الاعداد الطبيعية ١ و ٢ و ٣ و ٤ و و بالتوالي
 والصف الثالث اى عدد منه يحسب باضافة اعداد الصف الثانى من ابتداء
 العدد الاول للصف المذكور الى العدد المحاذى له فى الوضع وهو مركب ايضا
 من حاصل جمع الطبقات وهو يحتوى على عدد قليل الكوم المتناظرة ومعتد
 فالحد العاشر ٨٨٠ يدل على انه يوجد ٨٨٠ قلة فى الكوم المستطيلة
 المركبة من ١٠ طبقات والقانون $ع = \frac{(١ + د)(٢ + د + ٣ + د + ٤ + د + ٥ + د + ٦ + د + ٧ + د + ٨ + د + ٩ + د + ١٠ + د)}{٢}$
 اذا وضع فيه ١٠ بدل م و ١٠ بدل د الى

$ع = \frac{١٠ \times ١١ \times ١٢ \times ١٣ \times ١٤ \times ١٥ \times ١٦ \times ١٧ \times ١٨ \times ١٩ \times ٢٠}{٢} = ٨٨٠$ وهو ناتج موافق للناتج الموجود بالجدول
 هذا كله اذا كانت الكومة تامة فاذا لم تكن الكومة تامة اعتبر تمامها ثم
 تحسب الكومة التامة والكومة التى لزم اضافتها لتتم الكومة الناقصة
 والفرق بين هاتين الكومتين يعين الكومة الناقصة ونمثل لذلك فنقول

اذا فرض ان الكومة الهرمية الناقصة ذات القاعدة المربعة مركبة من ٤
 طبقات وكل ضلع من قاعدتها محتوى على ٨ قلات كانت الكومة مركبة
 من ٨ طبقات ومحتوية على $\frac{٨ \times ٩ \times ١٠ \times ١١}{٦} = ٢٠٤$ قلة فاذا حذف
 منها $\frac{٩ \times ١٠ \times ١١}{٦} = ١٦٥$ قلة وهو المقدار الذى يوجد فى الاربع طبقات المتمة
 فالباقي الذى هو ١٧٤ يدل على عدد القلات الكاش فى الكومة الناقصة

واذا فرض ايضا ان الكومة الهرمية الناقصة ذات القاعدة المثلثية مركبة
 من خمس طبقات وكل ضلع من قاعدتها يحتوى على ٨ قلات كانت الكومة
 التامة مركبة من ٨ طبقات ومحتوية على $\frac{٨ \times ٩ \times ١٠}{٦} = ١٢٠$ قلة
 فاذا حذف منها $\frac{٩ \times ١٠ \times ١١}{٦} = ١٦٥$ قلات وهو المقدار الذى يوجد فى
 الثلاث طبقات المتمة فالباقي ١١٠ قلة يكون عدد القلات الموجود
 فى الكومة الناقصة

واذا فرض ان الكومة المستطيلة الناقصة مركبة من ٦ طبقات وكل
 ضلع من اضلاع قاعدتها يحتوى على ١٥ قلة وان صف القاعدة

(١٩١)•

الطابق على ١٠ قلات كانت الكومة التامة مركبة من طبقات ومحتوية على $\frac{36 \times 14 \times 10}{4} = 1260$ قلة فإذا حذف منها $\frac{36 \times 5 \times 4}{4} = 90$ قلة وهو المقدار الذي يوجد في الأربع طبقات التامة يكون الباقي ٥٨٠ هو الكومة الناقصة

وتبقى المضروب ٣٦ في هذا المثال بواسطة المضروب $3 + 2 + 1 = 6$ الداخلي في القانون المتقدم وحيث كان $10 = 3 + 7$ يكون $10 = 1 + 9$ وكذلك يكون المضروب $12 = 3 \times 4$ في الكومة التامة $3 \times 4 + 2 \times 3 + 1 \times 2 = 20$

وإذا كان المطلوب معرفة عدد طبقات كومة هرمية ذات قاعدة مربعة بعد معرفة عدد قتل المحتوية عليه الكومة أمكن بواسطة الجدول الممتد امتدادا كافيا لهذا الغرض الاستغناء عن إجراء عملية الحساب بأن يبحث في الخط الثالث عند عدد قتل الكومة فأعداد الموجود في الخط الأول المقابل لهذا العدد يعين مقدار الطبقات الموجودة في الكومة فعلى ذلك إذا كانت الكومة محتوية على ٦٥٠ قلة تكون مركبة من ١٢ طبقة

ويمكن أيضا حل هذه المسألة بواسطة القانون $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2$ الذي فيه كمية $\frac{2}{3}$ معلومة بأن يستخرج منه كمية $\frac{1}{3}$ لكن حيث أن هذه المعادلة بدرجة ثالثة فيتعسر حلها بالطرق المعتادة يكتب بالبحث عن الجذر التكعيبي لأعظم مكعب يوجد في $\frac{2}{3}$ وهذا الجذر التكعيبي يكون مقدارا للكمية $\frac{1}{3}$ أن وافق مقدار $\frac{2}{3}$ كومة كاملة وبرهانه أن يستخرج من المعادلة المقدمة هذه المعادلة

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$$

ومن ثم ينتج $\frac{2}{3} < \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} > 2$ و $(1 + \frac{2}{3}) > 2$

$$\frac{2}{3} < 1 + \frac{2}{3} < 2$$

على

فعل ذلك تكون الكمية $\frac{1}{2}$ الجذر التكعيبي لـ 27 مكعب موجود في كمية

$$x^3 \text{ فإذا تذكرنا أن } (1 + \frac{1}{2})^3 = 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8}$$

يحدث كما فرضنا x^3 أو $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} > (1 + \frac{1}{2})^3$
 فإذا كان المطلوب معرفة عدد طبقات الكومة ذات القاعدة المثلثية من

$$\text{القانون } x^3 = \frac{(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})}{1} = \frac{(1 + \frac{1}{2})^3}{1} \text{ يحدث}$$

$$x^3 = \frac{(1 + \frac{1}{2})^3}{1} = \frac{(1 + \frac{1}{2})^3}{1} \text{ وينتج من ذلك}$$

$$x^3 < \frac{(1 + \frac{1}{2})^3}{1} \text{ و } x^3 > \frac{(1 + \frac{1}{2})^3}{1}$$

فكمية $\frac{1}{2}$ تكون حينئذ الجذر التكعيبي لـ 27 مكعب موجود
 في مقدار $\frac{1}{2}$

وأما الكومة المستطيلة فحيث كان يدخل في قانونها

$$x^3 = \frac{(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})}{1} = \frac{(1 + \frac{1}{2})^3}{1} \text{ ثلاث مجاهيل مختلفة يلزم معرفة}$$

مجهولين من هذه المجاهيل الثلاثة لتعيين الثالث

تم طبع النسخة الزهرية • في الاعمال الجبرية • بمطبعة مدرسة المهندسة

الندوية • الكاشفة بيولا ق مصر المحمية • مطوطة بعين عناية

فانظرها من تلافى رتب المجد وتدارك • سعادة على يمين

مبارك • في واسط شوال المبارك • الذي هو

من شهور سنة ١٢٦٩ هجرية • على

صاحبها افضل الصلاة

واذكى الصلوة

تم

